7 класс

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 3 часа 55 минут)

► **7-1.** Пассажиры поехали на экскурсию на пяти автобусах. Среднее количество пассажиров в автобусах равнялось 38. После того, как один автобус задержался, среднее количество пассажиров в четырёх далее поехавших автобусах стало равно 39. Сколько было пассажиров в задержавшемся автобусе?

✎ **Ответ.** 34 пассажира.

✎ **Решение.** Суммарное количество пассажиров изначально было равно $38 \cdot 5 = 190$. После того, как один автобус задержался, оказалось $39 \cdot 4 = 156$ пассажиров. Значит, в задержавшемся автобусе было $190 - 156 = 34$ пассажира.

☛ **Критерии проверки.** Верный ответ без обоснования: 0 баллов.

Верный ответ с примером того, как такое возможно: 1 балл.

► **7-2.** Можно ли разрезать клетчатый квадрат 35×35 на клетчатые прямоугольники такие, что у каждого из них длина и ширина отличаются на 1?

✎ **Решение.** Предположим, что такое разрезание возможно. Так как длина и ширина прямоугольника отличаются на 1, то одна из этих величин — чётное число. Поэтому площадь каждого прямоугольника разрезания будет чётным числом. Значит, и сумма площадей прямоугольников разрезания также будет чётным числом. Но эта сумма должна равняться площади квадрата со стороной 35, то есть числу нечётному. Противоречие.

☛ **Критерии проверки.** Только верный ответ: 0 баллов.

► **7-3.** Группа ребят организовала турнир на одном теннисном столе. Каждый раз играли два человека, которые не играли раньше. Ничьих в теннисе не бывает. Если участник проигрывает 2 игры, не обязательно подряд, то он выбывает из турнира. После того, как было проведено 25 игр, оказалось, что выбыли все участники, кроме трёх. Сколько участников изначально могло быть в турнире? Найдите все ответы и докажите, что других нет.

✎ **Ответ.** 14 или 15.

✎ **Решение.** Каждый участник выбывает, потерпев ровно два поражения. В ситуации, когда остались трое «финалистов», общее количество поражений равно 25. Если из турнира выбыло n человек, то они суммарно потерпели $2n$ поражений, а на счету «финалистов» могло быть 0, 1, 2, 3 или 4 поражения (если больше четырёх, то у кого-то будет два поражения, тогда он уже выбыл!). Получаем уравнения $2n + 1 = 25$, $2n + 3 = 25$ откуда $n = 12$ или $n = 11$ (понятно, что уравнения $2n+$четное число $= 25$ рассматривать не нужно). Тогда общее число участников турнира может равняться 15 или 14.

Но оба ли эти два случая на самом деле возможны? Да, оба, и для доказательства этого нужно привести два примера.

Пример на 15. Пусть остались игроки A, B и C, и выбыли игроки $1, 2, \ldots, 12$. Сначала 1 выиграл A, далее B и C по-очереди выиграли $1, 2, \ldots, 12$.

Пример на 14. Пусть остались игроки A, B и C, и выбыли игроки $1, 2, \ldots, 11$. Сначала 1 выиграл A, 2 выиграл B, 3 выиграл C. Далее игрок A выиграл 2 и 3, игрок B выиграл 1 и 3, игрок C выиграл 1 и 2. Тем самым игроки 1, 2 и 3 выбыли. Далее B и C по-очереди выиграли $4, 5, \ldots, 11$.

☛ **Критерии проверки.** Доказано только, что количество пассажиров может равняться 14 или 15, но примеров того, как такое может быть, нет: 4 балла.

Есть оба ответа, но примеров того, как такое может быть, нет: 2 балла.

Есть оба ответа с примерами того, как такое может быть: 3 балла.

Есть только один ответ, с примером или без: 1 балл.

► **7-4.** Петя хочет раскрасить все целые числа от 1 до 1000 в несколько цветов так, чтобы выполнялось свойство: если одно число делится на другое, то они раскрашены в разные цвета. Какое наименьшее количество цветов понадобится Пете?

✎ **Решение.** 10 цветов. Заметим, что если взять два числа среди чисел 1, 2, 4, 8, …, 512, то одно будет делиться на другое. Значит, понадобится не менее 10 цветов. А в 10 цветов раскрасить числа можно: 1 — первый цвет; 2 и 3 — второй цвет; 4, 5, 6 и 7 — третий цвет; …; 512, 513, …, 1000 — десятый цвет. Ни одно число не делится на число того же цвета, так как отношение двух одноцветных числе всегда меньше 2.

☛ **Критерии проверки.** Только верный ответ: 0 баллов.

Только доказательство того, что цветов не менее 10: 3 балла.

Только пример раскраски в 10 цветов: 3 балла. При этом если пример раскраски верный, он не обосновая, или обоснован с существенными пробелами, то за пример ставится 2 балла, а не 3 балла.

► **7-5.** В квадрате $ABCD$ выбрана такая точка K, что треугольник KCD равносторонний. На луче AK отметили такую точку L, что $AL = AC$. Докажите, что треугольник BKL равнобедренный.

✎ **Решение.** Треугольник ADK равнобедренный с углом при вершине D равным $30°$, поэтому $\angle DAK = 75°$. Из чего следует, что $\angle BAL = 15°$. Кроме того $\angle BDK = 15$. Треугольники BDK и BAL равны, так как $AB = DK$, $AL = AC = BD$ и $\angle BAL = \angle BDK = 15°$, поэтому $BK = BL$.

☛ **Критерии проверки.** Найдены ОБА угла $15°$: 3 балла.

► **7-6.** Клетки таблицы 100×100 раскрашены в 7 цветов (среди которые есть красный) так, что для любой клетки в объединении её строки и столбца встречаются клетки всех 7-ми цветов. Найдите наибольшее возможное количество красных клеток в таблице.

✎ **Ответ.** 9400.

✎ **Решение.** *Оценка.* Докажем, что клеток любого цвета r, встречающегося в раскраске, не меньше 100. Предположим, это не так, и клеток цвета r не больше 99. Тогда найдётся строка без клеток цвета r. Аналогично, найдётся столбец без клеток цвета r. Но тогда для клетки в пересечении этих строки и столбца условие не выполняется, противоречие. Следовательно, клеток любого цвета r не меньше 100.

Поскольку клеток любого не красного цвета не меньше 100, то клеток красного цвета не больше $100^2 - 6 \cdot 100 = 9400$.

Пример. Ровно 9400 клеток красного цвета может быть, например, если в первых 94 строках таблицы все клетки красные, а каждая из остальных 6 строк состоит из клеток какого-то одного цвета, причём цвета этих 6 строк различны.

☛ **Критерии проверки.** Только пример на 9400 красных клеток: 2 балла.

Только оценка, что более 9400 красных клеток не бывает: 4 балла.

При этом оценка состоит из двух частей: доказательство того, что каждого цвета не менее 100, и ввод из этого оценки. Если присутствует только одна их частей, то за неё ставится 2 балла из 4-х.

8 класс

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 3 часа 55 минут)

► **8-1.** Пассажиры поехали на экскурсию на пяти автобусах. Среднее количество пассажиров в автобусах равнялось 38. После того, как один автобус задержался, среднее количество пассажиров в четырёх далее поехавших автобусах стало равно 39. Сколько было пассажиров в задержавшемся автобусе?

✎ **Ответ.** 34 пассажира.

✎ **Решение.** Суммарное количество пассажиров изначально было равно $38 \cdot 5 = 190$. После того, как один автобус задержался, оказалось $39 \cdot 4 = 156$ пассажиров. Значит, в задержавшемся автобусе было $190 - 156 = 34$ пассажира.

Критерии проверки. Верный ответ без обоснования: 0 баллов.

Верный ответ с примером того, как такое возможно: 1 балл.

► **8-2.** Группа ребят организовала турнир на одном теннисном столе. Каждый раз играли два человека, которые не играли раньше. Ничьих в теннисе не бывает. Если участник проигрывает 2 игры, не обязательно подряд, то он выбывает из турнира. После того, как было проведено 25 игр, оказалось, что выбыли все участники, кроме трёх. Сколько участников изначально могло быть в турнире? Найдите все ответы и докажите, что других нет.

✎ **Ответ.** 14 или 15.

✎ **Решение.** Каждый участник выбывает, потерпев ровно два поражения. В ситуации, когда остались трое «финалистов», общее количество поражений равно 25. Если из турнира выбыло n человек, то они суммарно потерпели $2n$ поражений, а на счету «финалистов» могло быть 0, 1, 2, 3 или 4 поражения (если больше четырёх, то у кого-то будет два поражения, тогда он уже выбыл!). Получаем уравнения $2n + 1 = 25$, $2n + 3 = 25$ откуда $n = 12$ или $n = 11$ (понятно, что уравнения $2n+$четное число $= 25$ рассматривать не нужно). Тогда общее число участников турнира может равняться 15 или 14.

Но оба ли эти два случая на самом деле возможны? Да, оба, и для доказательства этого нужно привести два примера.

Пример на 15. Пусть остались игроки A, B и C, и выбыли игроки $1, 2, \ldots, 12$. Сначала 1 выиграл A, далее B и C по-очереди выиграли $1, 2, \ldots, 12$.

Пример на 14. Пусть остались игроки A, B и C, и выбыли игроки $1, 2, \ldots, 11$. Сначала 1 выиграл A, 2 выиграл B, 3 выиграл C. Далее игрок A выиграл 2 и 3, игрок B выиграл 1 и 3, игрок C выиграл 1 и 2. Тем самым игроки 1, 2 и 3 выбыли. Далее B и C по-очереди выиграли $4, 5, \ldots, 11$.

Критерии проверки. Доказано только, что количество пассажиров может равняться 14 или 15, но примеров того, как такое может быть, нет: 4 балла.

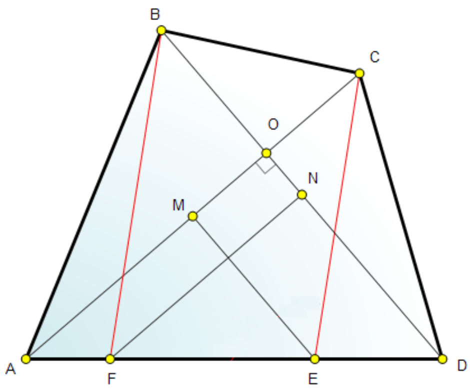
Есть оба ответа, но примеров того, как такое может быть, нет: 2 балла.

Есть оба ответа с примерами того, как такое может быть: 3 балла.

Есть только один ответ, с примером или без: 1 балл.

► **8-3.** В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны. Серединный перпендикуляр к диагонали AC пересекает сторону AD в точке E. Серединный перпендикуляр к диагонали BD пересекает сторону AD в точке F. Точки расположены в порядке $A - F - E - D$. Докажите, что $BF \| CE$.

✎ **Решение.**



Так как точка E лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC, то $AE = EC$, откуда $\angle CAE = \angle ACE = x$. Но тогда $\angle CED = 2x$, как внешний угол треугольника AEC. Аналогично, так как точка F лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BD, то $BF = FD$, откуда $\angle FDB = \angle FBD = y$. Но тогда $\angle BFD = 180^\circ - 2y$, по сумме углов треугольника BFD. Для доказательства $BF \| CE$ достаточно показать, что $\angle BFE = \angle CED$, то есть что $180^\circ - 2y = 2x$. Но это верно, так как из прямоугольного треугольника AOD, где O — точка пересечения диагоналей, получаем $x + y = 90^\circ$.

▶ **8-4.** Натуральные числа a, b, c, d таковы, что $b = ac$, число a делится на d и число c делится на d. Докажите, что число $a + b + c + d^4$ — составное.

✎ **Решение.** Пусть $a+b+c+d$ — простое. Заметим, что $a+b+c+d^4 = ac+a+c+d^4$ и это делится на d, так как $a \vdots d$ и $c \vdots d$. А ещё $a+b+c+d > d$, значит, $d = 1$. Тогда $a+b+c+d^4 = ac+a+c+1 = (a+1)(c+1)$. Получили разложение простого числа на множители, большие 1, противоречие.

☛ **Критерии проверки.** В решении забыт случай $d = 1$, а случай $d > 1$ рассмотрен верно: 3 балла.

▶ **8-5.** Есть 101 гирька, каждая весит 7, 8, 9, 10 или 11 грамм. Нужно так разложить часть этих гирек в пакеты по 2 гирьки в пакет, чтобы в каждом пакете веса гирек отличались не более чем на 1 грамм. Какое наибольшее количество пакетов всегда удастся составить?

✎ **Ответ.** 49.

✎ **Решение.** Вначале докажем, что 49 пакетов пар всегда удастся составить. Будем составлять пакеты до тех пора, пока получается. Предположим, что больше ни один пакет составить нельзя. Из оставшихся гирек не более одной весят 7 или 8, не более одной – 9 или 10, не более одной — 11: иначе можно составить ещё один пакет. Значит, осталось не более трёх гирек, а пакетов составлено хотя бы $(101 - 3)/2 = 49$.

Теперь приведём пример, когда нельзя составить более 49 пакетов. Пусть 99 гирек весят 7, одна — 9, одна — 11. Тогда в пакете могут оказаться только гирьки по 9. Из них можно составить только 49 пакетов. Есть много других аналогичных примеров.

☛ **Критерии проверки.** Только доказательство того, что 49 пакетов составить всегда можно: 4 балла.

Только пример ситуации, в которой более 49 пакетов составить нельзя: 2 балла.

▶ **8-6.** Клетки таблицы 100×100 раскрашены в 7 цветов (среди которые есть красный) так, что для любой клетки в объединении её строки и столбца встречаются клетки всех 7-ми цветов. Найдите наибольшее возможное количество красных клеток в таблице.

✎ **Ответ.** 9400.

✎ **Решение.** *Оценка.* Докажем, что клеток любого цвета r, встречающегося в раскраске, не меньше 100. Предположим, это не так, и клеток цвета r не больше 99. Тогда найдётся строка без клеток цвета r. Аналогично, найдётся столбец без клеток цвета r. Но тогда для клетки в пересечении этих строки и столбца условие не выполняется, противоречие. Следовательно, клеток любого цвета r не меньше 100.

Поскольку клеток любого не красного цвета не меньше 100, то клеток красного цвета не больше $100^2 - 6 \cdot 100 = 9400$.

Пример. Ровно 9400 клеток красного цвета может быть, например, если в первых 94 строках таблицы все клетки красные, а каждая из остальных 6 строк состоит из клеток какого-то одного цвета, причём цвета этих 6 строк различны.

☛ **Критерии проверки.** Только пример на 9400 красных клеток: 2 балла.

Только оценка, что более 9400 красных клеток не бывает: 4 балла.

При этом оценка состоит из двух частей: доказательство того, что каждого цвета не менее 100, и ввод из этого оценки. Если присутствует только одна их частей, то за неё ставится 2 балла из 4-х.

9 класс

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 3 часа 55 минут)

► **9-1.** На острове проживают 31 абориген, каждый или рыцарь, всегда говорящий правду, или лжец, который всегда лжёт. Однажды каждый про каждого из остальных сказал, кто он: рыцарь или лжец. Из 930 полученных ответов ровно 420 раз прозвучал ответ «Он – лжец!». Сколько лжецов могло быть на острове? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

✎ **Ответ.** 10 или 21.

✎ **Решение.** В паре рыцарь-лжец фразу «Он – лжец!» скажут двое. В паре рыцарь-рыцарь или лжец-лжец никто. Тем самым 420 есть удвоенное произведение количества рыцарей на количество лжецов. Решая систему $x \cdot y = 210$, $x + y = 31$ находим, что лжецов 10 или 21. Оба эти варианта подходят.

Критерии проверки. Один ответ (с примером или без) без доказательства того, что других нет: 1 балл.

Оба ответ (с примером или без) без доказательства того, что других нет: 2 балл.

Есть в целом верное решение, в котором ЯВНО получены числа 10 и 21, но в ответ взято только одно из них: 4 балла.

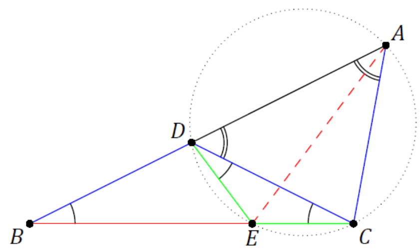
► **9-2.** Можно ли разрезать клетчатый квадрат 45×45 на клетчатые прямоугольники такие, что периметр каждого из них равен 18, 22, 26 или 30?

✎ **Решение.** Нельзя. Предположим, что такое разрезание возможно. Так как периметры прямоугольников равны 18, 22, 26 или 30, то сумма длины и ширины равна 9, 11, 13 или 15. Это означает, что одна из этих величин — чётное число, а другая — нечётное. Поэтому площадь каждого прямоугольника разрезания будет чётным числом. Значит, и сумма площадей прямоугольников разрезания также будет чётным числом. Но эта сумма должна равняться площади квадрата со стороной 45, то есть числу нечётному. Противоречие.

Критерии проверки. Верный ответ без обоснования: 0 баллов.

► **9-3.** В треугольнике ABC на стороне AB взята точка D, а на стороне BC взята точка E. Оказалось, что $BD = DC = CA$ и $DE = EC$. Докажите, что $BE = EA$.

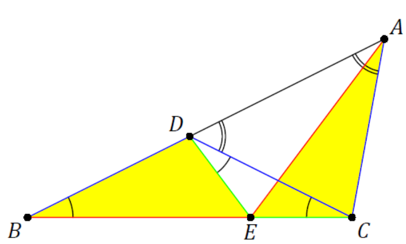
✎ **Решение 1.** Пусть $\angle ABC = \beta$. Тогда $\beta = \angle ABC = \angle BCD = \angle ECD = \angle CDE$.



Из равнобедренного треугольника DEC получаем, что $\angle DEC = 180 - 2\beta$, а из равнобедренного треугольника DCA получаем, что $\angle ADC = \angle DAC = 2\beta$ ($\angle ADC = 2\beta$ как внешний угол треугольника BDC). Таким образом, сумма углов DEC и DAC равна $180°$, откуда точки E, D, A, C лежат на одной окружности. Но тогда $\angle DAE = \angle DCE = \beta$, откуда треугольник BEA равнобедренный,. что и требовалось доказать.

Так же мы доказали, что AE — биссектриса $\angle BAC$.

✎ **Решение 2.** Достаточно доказать, что $\triangle AEC = \triangle BED$, а так как в этих треугольниках по условию есть по две равные стороны, то достаточно доказать, что $\angle ECA = \angle EDB$. Пусть $\angle ABC = \beta$. Как и в решении выше, получаем, что $\beta = \angle ABC = \angle BCD = \angle ECD = \angle CDE$.



Далее, $\angle CDA = 2\beta$ как внешний угол треугольника BDC, откуда из равнобедренности треугольника DCA получаем, что $\angle DAC = 2\beta$. Но тогда $\angle ACB = 180 - 3\beta$ (по сумме уголов треугольника ABC), $\angle BDE = 180° - \angle EDC - \angle ADC = 180 - 3\beta$, то есть углы ECA и EDB равны, что мы и хотели доказать.

✎ **Решение 3.** Равнобедренные треугольники BCD и DCE подобны по двум углам, откуда $\frac{DC}{BC} = \frac{EC}{DC}$. Так как $AC = DC$, то $\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{BC} = \frac{EC}{DC} = \frac{EC}{AC}$. Но тогда треугольники ABC и EAC подобны по двум сторонам и общему углу ACB. Поэтому

$\angle EAC = \angle ABC$. Далее как в решениях выше можно посчитать, что $\angle BAC = 2\angle ABC$, откуда $\angle BAE = \angle BAC - \angle EAC = \angle ABC$, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. Во всех решениях «за грязь» (перепутаны равенства углов и т.п.) снимается не более 1 балла.

Для решения №1.

Только наблюдение, что нужно доказать равенство углов ABE и EAB: 0 баллов.

Только наблюдение, что нужно доказать, что точки E, D, A, C лежат на одной окружности (так как тогда $\angle DAE$ будет равен $\angle DCE$): 2 балла.

Только доказательство одного из равенств $\angle CAD+\angle DEC = 180°$, $\angle CAD = \angle BED$, $\angle ECA+\angle ADE = 180°$, $\angle EAC = \angle EDC$, но далее решение не завершено: 3 балла.

Для решения №2.

Только замечено, что нужно доказывать $\triangle AEC = \triangle BED$: 2 балла.

Доказано только, что $\angle ECA = \angle EDB$: 3 балла.

Для решения №3.

Только доказательство подобия треугольников ABC и EAC: 3 балла.

Комментарий. Если решения задачи нет, то более 3-х баллов за задачу ни при каких обстоятельствах поставлено быть не может.

► **9-4.** Есть 101 гирька, каждая весит 7, 8, 9, 10 или 11 грамм. Нужно так разложить часть этих гирек в пакеты по 2 гирьки в пакет, чтобы в каждом пакете веса гирек отличались не более чем на 1 грамм. Какое наибольшее количество пакетов всегда удастся составить?

Ответ. 49.

Решение. Вначале докажем, что 49 пакетов пар всегда удастся составить. Будем составлять пакеты до тех пора, пока получается. Предположим, что больше ни один пакет составить нельзя. Из оставшихся гирек не более одной весят 7 или 8, не более одной – 9 или 10, не более одной — 11: иначе можно составить ещё один пакет. Значит, осталось не более трёх гирек, а пакетов составлено хотя бы $(101-3)/2 = 49$.

Теперь приведём пример, когда нельзя составить более 49 пакетов. Пусть 99 гирек весят 7, одна — 9, одна — 11. Тогда в пакете могут оказаться только гирьки по 9. Из них можно составить только 49 пакетов. Есть много других аналогичных примеров.

Критерии проверки. Только доказательство того, что 49 пакетов составить всегда можно: 4 балла.

Только пример ситуации, в которой более 49 пакетов составить нельзя: 2 балла.

► **9-5.** Василий меняет в записи $\dfrac{1*2*\ldots*2023}{1*2*\ldots*2023}$ звёздочки на знаки умножения и деления. Затем он считает, чему равно полученное число. Сколько **натуральных** чисел, не превосходящих 2023, он может получить таким образом?

Ответ. 44 числа.

Решение. Заметим, что если перед числом k в числителе и знаменателе написаны одинаковые знаки, то оно даёт вклад 1 в произведение. Если в числителе стоит знак умножения, а в числителе деление, то вклад в произведение – k^2, если наоборот, то $\dfrac{1}{k^2}$. То если результат — целое число, то это точный квадрат. Существует 44 квадрата не превосходящих 2023, и все эти значения бывают: чтобы получить n^2, где $n > 1$, напишем знак умножения везде, кроме как перед n в знаменателе. Чтобы получить 1 напишем знак умножения везде.

Критерии проверки. Складываются баллы за следующие пункты:

— только верный ответ: 0 баллов;

— доказательство того, что все получаемые числа — квадраты: 4 балла;

— доказательство того, что все квадраты, меньшие 2023, можно получить: 3 балла.

При этом за вычислительные ошибки (например, обсчет в количестве квадратов от 1 до 2023) снимается 1 балл.

► **9-6.** Клетки таблицы 100×100 раскрашены в 13 цветов (среди которые есть красный) так, что для любой клетки в объединении её строки и столбца встречаются клетки всех 13-ти цветов. Найдите наибольшее возможное количество красных клеток в таблице.

Решение. *Оценка.* Докажем, что клеток любого цвета r, встречающегося в раскраске, не меньше 100. Предположим, это не так, и клеток цвета r не больше 99. Тогда найдётся строка без клеток цвета r. Аналогично, найдётся столбец без клеток цвета r. Но тогда для клетки в пересечении этих строки и столбца условие не выполняется, противоречие. Следовательно, клеток любого цвета r не меньше 100.

Поскольку клеток любого не красного цвета не меньше 100, то клеток красного цвета не больше $100^2 - 12 \cdot 100 = 8800$.

Пример. Ровно 8800 клеток красного цвета может быть, например, если в первых 88 строках таблицы все клетки красные, а каждая из остальных 12 строк состоит из клеток какого-то одного цвета, причём цвета этих 12 строк различны.

Критерии проверки. Только пример на 8800 красных клеток: 2 балла.

Только оценка, что более 8800 красных клеток не бывает: 4 балла.

При этом оценка состоит из двух частей: доказательство того, что каждого цвета не менее 100, и ввод из этого оценки. Если присутствует только одна их частей, то за неё ставится 2 балла из 4-х.

10 класс

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 3 часа 55 минут)

► **10-1.** Существуют ли такие (не обязательно целые) числа x, y, z, что $x + \frac{1}{y} = z$, $y + \frac{1}{z} = x$, $z + \frac{1}{x} = y$?

✎ **Решение.** Нет. Из условия получаем равенства $xy + 1 = yz$, $yz + 1 = zx$, $zx + 1 = xy$. Складывая их, получаем $3 = 0$ — противоречие.

✎ **Решение.** Нет. Из чисел x, y, z два одного знака. Но тогда третье – того же знака. Если все числа положительны, то из условия $z > x$, $x > y$, $y > z$ — противоречие.

А если все три числа отрицательны, то из условия $z < x$, $x < y$, $y < z$ — противоречие.

Критерии проверки. Верный ответ без обоснования: 0 баллов.

► **10-2.** Можно ли разрезать клетчатый квадрат 45×45 на клетчатые прямоугольники такие, что периметр каждого из них равен 18, 22, 26 или 30?

✎ **Решение.** Нельзя. Предположим, что такое разрезание возможно. Так как периметры прямоугольников равны 18, 22, 26 или 30, то сумма длины и ширины равна 9, 11, 13 или 15. Это означает, что одна из этих величин — чётное число, а другая — нечётное. Поэтому площадь каждого прямоугольника разрезания будет чётным числом. Значит, и сумма площадей прямоугольников разрезания также будет чётным числом. Но эта сумма должна равняться площади квадрата со стороной 45, то есть числу нечётному. Противоречие.

Критерии проверки. Верный ответ без обоснования: 0 баллов.

► **10-3.** Есть 101 гирька, каждая весит 7, 8, 9, 10 или 11 грамм. Нужно так разложить часть этих гирек в пакеты по 2 гирьки в пакет, чтобы в каждом пакете веса гирек отличались не более чем на 1 грамм. Какое наибольшее количество пакетов всегда удастся составить?

✎ **Ответ.** 49.

✎ **Решение.** Вначале докажем, что 49 пакетов пар всегда удастся составить. Будем составлять пакеты до тех пора, пока получается. Предположим, что больше ни один пакет составить нельзя. Из оставшихся гирек не более одной весят 7 или 8, не более одной – 9 или 10, не более одной — 11: иначе можно составить ещё один пакет. Значит, осталось не более трёх гирек, а пакетов составлено хотя бы $(101 - 3)/2 = 49$.

Теперь приведём пример, когда нельзя составить более 49 пакетов. Пусть 99 гирек весят 7, одна — 9, одна — 11. Тогда в пакете могут оказаться только гирьки по 9. Из них можно составить только 49 пакетов. Есть много других аналогичных примеров.

Критерии проверки. Только доказательство того, что 49 пакетов составить всегда можно: 4 балла.

Только пример ситуации, в которой более 49 пакетов составить нельзя: 2 балла.

► **10-4.** Дан треугольник ABC. Точка X на продолжении стороны AC за точку A такова, что $AX = AB$. Точка Y на продолжении стороны BC за точку B такова, что $BY = AB$. Докажите, что точка пересечения описанных окружностей треугольников ACY и BCX (отличная от C) лежит на биссектрисе угла BCA.

✎ **Решение.** Пусть окружности пересекаются в точке P. Тогда $\angle AXP = \angle PBY$, $\angle XAP = \angle PYB$. Следовательно, треугольники AXP и YBP равны, откуда $PA = PY$. Так как углы ACP и CY опираются на эти равные хорды PA и PY, то они равны.

Критерии проверки. Замечено равенство углов $\angle AXP = \angle PBY$ и/или $\angle XAP = \angle PYB$: 2 балла.

Доказано, что $PA = PY$, дальнейших содержательных продвижений нет: 4 балла (не суммируется с двумя баллами по предыдущему критерию).

► **10-5.** Василий меняет в записи $\dfrac{1 * 2 * \ldots * 2023}{1 * 2 * \ldots * 2023}$ звёздочки на знаки умножения и деления. Затем он считает, чему равно полученное число. Сколько **натуральных** чисел, не превосходящих 2023, он может получить таким образом?

✎ **Ответ.** 44 числа.

✎ **Решение.** Заметим, что если перед числом k в числителе и знаменателе написаны одинаковые знаки, то оно даёт вклад 1 в произведение. Если в числителе стоит знак умножения, а в числителе деление, то вклад в произведение – k^2, если наоборот, то $\dfrac{1}{k^2}$. То если результат — целое число, то это точный квадрат. Существует 44 квадрата не превосходящих 2023, и все эти значения бывают: чтобы получить n^2, где $n > 1$, напишем знак умножения везде, кроме как перед n в знаменателе. Чтобы получить 1 напишем знак умножения везде.

Критерии проверки. Складываются баллы за следующие пункты:
— только верный ответ: 0 баллов;
— доказательство того, что все получаемые числа — квадраты: 4 балла;
— доказательство того, что все квадраты, меньшие 2023, можно получить: 3 балла.
При этом за вычислительные ошибки (например, обсчет в количестве квадратов от 1 до 2023) снимается 1 балл.

► **10-6.** В каждую клеточку таблицы 9×9 записали целое число. Оказалось, что для любых 5-ти чисел в любой строке в этой же строке есть число, равное сумме этих 5-ти чисел. Аналогично, оказалось, что для любых 5-ти чисел в любом столбце в этом же столбце есть число, равное сумме этих 5-ти чисел. Найдите наименьшее возможное количество чисел в таблице, равных нулю.

Ответ. 63 нуля.

Решение. *Оценка.* Докажем, что в произвольной строке не может быть двух положительных или двух отрицательных чисел. Пусть есть два положительных (для отрицательных чисел доказательство аналогично). Упорядочим 9 чисел в этой строке: $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4 \geqslant a_5 \geqslant a_6 \geqslant a_7 \geqslant a_8 \geqslant a_9$.

Если $a_5 < 0$, то сумма $a_5 + \dots + a_9$ строго меньше a_9, и поэтому в этой строке нет числа, равного этой сумме.

Если же $a_5 \geqslant 0$, то сумма $a_1 + \dots + a_5$ строго больше a_1 (именно в этом месте мы используем, что $a_2 > 0$), и поэтому в этой строке нет числа, равного этой сумме.

Итак, в каждой строке не более двух ненулевых чисел, поэтому нулей хотя бы 7, значит, во всей таблице хотя бы 63 нуля.

Пример. 63 нуля действительно может быть. Например, поместим в первую строку $10000000(-1)$ и далее циклически сдвинем этот ряд 8 раз, записывая результаты в другие строки. В каждом столбце тогда будет $+1, -1$ и 8 нулей. Возможны и другие примеры.

Критерии проверки. Только верный ответ: 0 баллов.

Верный ответ с верным примером: 3 балла.

Верное доказательство оценки без примера или с неверным примером: 4 балла.

Если в доказательстве оценки утверждается, что в каждой строке (или столбце) не более двух ненулевых чисел, но этот факт не доказан или доказан неверно, то за доказательство оценки ставится 2 балла из 4-х (иначе говоря, сама формулировка этого факта оценивается в 2 балла из 4-х баллов за оценку).

50 Всероссийская олимпиада школьников по математике

2023/2024 учебный год • Муниципальный этап • Ульяновская область

11 класс

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 3 часа 55 минут)

► **11-1.** Существуют ли такие (не обязательно целые) числа x, y, z, что $x + \frac{1}{y} = z$, $y + \frac{1}{z} = x$, $z + \frac{1}{x} = y$?

✎ **Решение.** Нет. Из условия получаем равенства $xy + 1 = yz$, $yz + 1 = zx$, $zx + 1 = xy$. Складывая их, получаем $3 = 0$ — противоречие.

✎ **Решение.** Нет. Из чисел x, y, z два одного знака. Но тогда третье – того же знака. Если все числа положительны, то из условия $z > x$, $x > y$, $y > z$ — противоречие.

А если все три числа отрицательны, то из условия $z < x$, $x < y$, $y < z$ — противоречие.

Критерии проверки. Верный ответ без обоснования: 0 баллов.

► **11-2.** Можно ли куб размера $40 \times 40 \times 40$ разрезать на такие параллепипеды, у каждого из которых длины сторон яляются тремя последовательными натуральными числами?

✎ **Решение.** Нельзя. У каждого такого параллелепипеда длина одной из сторон делится на 3, значит, объём тоже делится на 3. Поэтому объём куба должен делится на 3, но он равен 40^3 и на 3 не делится.

Критерии проверки. Верный ответ без обоснования: 0 баллов.

► **11-3.** Есть 101 гирька, каждая весит 7, 8, 9, 10 или 11 грамм. Нужно так разложить часть этих гирек в пакеты по 2 гирьки в пакет, чтобы в каждом пакете веса гирек отличались не более чем на 1 грамм. Какое наибольшее количество пакетов всегда удастся составить?

✎ **Ответ.** 49.

✎ **Решение.** Вначале докажем, что 49 пакетов пар всегда удастся составить. Будем составлять пакеты до тех пора, пока получается. Предположим, что больше ни один пакет составить нельзя. Из оставшихся гирек не более одной весят 7 или 8, не более одной – 9 или 10, не более одной — 11: иначе можно составить ещё один пакет. Значит, осталось не более трёх гирек, а пакетов составлено хотя бы $(101 - 3)/2 = 49$.

Теперь приведём пример, когда нельзя составить более 49 пакетов. Пусть 99 гирек весят 7, одна — 9, одна — 11. Тогда в пакете могут оказаться только гирьки по 9. Из них можно составить только 49 пакетов. Есть много других аналогичных примеров.

Критерии проверки. Только доказательство того, что 49 пакетов составить всегда можно: 4 балла.

Только пример ситуации, в которой более 49 пакетов составить нельзя: 2 балла.

► **11-4.** Дан остроугольный треугольник ABC. Точка P насtороне AC и Q на стороне BC таковы, что четырёхугольник $APQB$ вписан. Перпендикуляр к BC в точке Q и перпендикуляр к AC в точке P пересекаются в точке R. Докажите, что $CR \perp AB$.

✎ **Решение.** Достаточно доказать, что $\angle ABC = \angle QRC$. Так как $\angle RQC + \angle RPC = 180°$, то $PRQC$ вписан. Так как $APQB$ вписан, то $\angle ABC = 180° - \angle APQ = \angle QPC = \angle QRC$, что мы и хотели доказать.

► **11-5.** Василий меняет в записи $\dfrac{1 * 2 * \ldots * 2023}{1 * 2 * \ldots * 2023}$ звёздочки на знаки умножения и деления. Затем он считает, чему равно полученное число. Сколько **натуральных** чисел, не превосходящих 2023, он может получить таким образом?

✎ **Ответ.** 44 числа.

✎ **Решение.** Заметим, что если перед числом k в числителе и знаменателе написаны одинаковые знаки, то оно даёт вклад 1 в произведение. Если в числителе стоит знак умножения, а в числителе деление, то вклад в произведение – k^2, если наоборот, то $\dfrac{1}{k^2}$. То если результат — целое число, то это точный квадрат. Существует 44 квадрата не превосходящих 2023, и все эти значения бывают: чтобы получить n^2, где $n > 1$, напишем знак умножения везде, кроме как перед n в знаменателе. Чтобы получить 1 напишем знак умножения везде.

Критерии проверки. Складываются баллы за следующие пункты:

— только верный ответ: 0 баллов;

— доказательство того, что все получаемые числа — квадраты: 4 балла;

— доказательство того, что все квадраты, меньшие 2023, можно получить: 3 балла.

При этом за вычислительные ошибки (например, обсчет в количестве квадратов от 1 до 2023) снимается 1 балл.

► **11-6.** В каждую клеточку таблицы 9×9 записали целое число. Оказалось, что для любых 5-ти чисел в любой строке в этой же строке есть число, равное сумме этих 5-ти чисел. Аналогично, оказалось, что для любых 5-ти чисел в любом столбце в этом же столбце есть число, равное сумме этих 5-ти чисел. Найдите наименьшее возможное количество чисел в таблице, равных нулю.

✎ **Ответ.** 63 нуля.

✎ **Решение.** *Оценка.* Докажем, что в произвольной строке не может быть двух положительных или двух отрицательных чисел. Пусть есть два положительных (для отрицательных чисел доказательство аналогично). Упорядочим 9 чисел в этой строке: $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4 \geqslant a_5 \geqslant a_6 \geqslant a_7 \geqslant a_8 \geqslant a_9$.

Если $a_5 < 0$, то сумма $a_5 + \cdots + a_9$ строго меньше a_9, и поэтому в этой строке нет числа, равного этой сумме.

Если же $a_5 \geqslant 0$, то сумма $a_1 + \cdots + a_5$ строго больше a_1 (именно в этом месте мы используем, что $a_2 > 0$), и поэтому в этой строке нет числа, равного этой сумме.

Итак, в каждой строке не более двух ненулевых чисел, поэтому нулей хотя бы 7, значит, во всей таблице хотя бы 63 нуля.

Пример. 63 нуля действительно может быть. Например, поместим в первую строку $10000000(-1)$ и далее циклически сдвинем этот ряд 8 раз, записывая результаты в другие строки. В каждом столбце тогда будет $+1, -1$ и 8 нулей. Возможны и другие примеры.

☛ **Критерии проверки.** Только верный ответ: 0 баллов.

Верный ответ с верным примером: 3 балла.

Верное доказательство оценки без примера или с неверным примером: 4 балла.

Если в доказательстве оценки утверждается, что в каждой строке (или столбце) не более двух ненулевых чисел, но этот факт не доказан или доказан неверно, то за доказательство оценки ставится 2 балла из 4-х (иначе говоря, сама формулировка этого факта оценивается в 2 балла из 4-х баллов за оценку).