49 Всероссийская олимпиада школьников по математике
2022/2023 учебный год • Муниципальный этап • Ульяновская область

7 класс

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 3 часа 55 минут)

► **7-1.** В записи * + * + * + * + * + * + * + * = ** замените звёздочки **различными** цифрами так, чтобы равенство было верным.

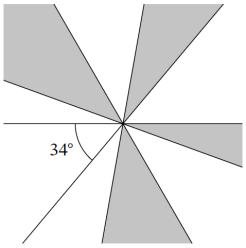
✎ **Решение.** $1+2+4+5+7+8+9+0=36$.

☛ **Комментарий.** Можно показать, что приведенный пример единственен с точностью до порядка слагаемых в левой части. Действительно, пусть в правой части стоит число $\overline{ab}$. Так как сумма десяти различных цифр равна 45, то данное равенство можно записать в виде $45-a-b=10a+b$. Упрощая, получаем $11a+2b=45$. Далее перебором убеждаемся, что $a=3$ и $b=6$.

☛ **Критерии проверки.** Приведен верный ответ — 7 баллов.

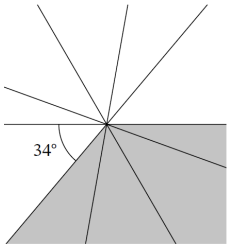
Приведен неверный ответ (в частности, с повторяющимися цифрами) — 0 баллов.

► **7-2.** На рисунке изображены 5 прямых, пересекающиеся в одной точке. Один из получившихся углов равен 37°. Сколько градусов составляет сумма четырёх углов, закрашенных серым цветом?



✎ **Ответ.** 146°.

✎ **Решение.** Заменим два «верхних» серых угла на равные им вертикальные, как на картинке:



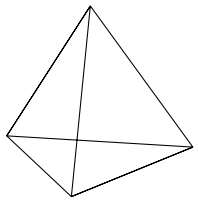
Теперь ясно, что серые углы в сумме с углом 34° составляют 180°. Значит, сумма серых углов равна 146°.

► **7-3.** На уроке 10 школьников писали контрольную из 11 задач. Баллы за задачи определялись после проверки контрольной по правилу: если задачу решил 1 человек — 4 балла; если 2 человека — 2 балла; если 3 или 4 человека — 1 балл; если больше четырёх — 0 баллов. Если школьник задачу решил, то он получал за неё соответствующий балл, иначе — 0 баллов. Докажите, что какие-то два школьника набрали поровну баллов за контрольную.

✎ **Решение.** Каждая задача приносит суммарно человеку не более 4 баллов. Значит, сумма всех результатов — не более 44 баллов. Но если бы нашлось 10 различных результатов, их сумма оказалась бы не меньше $0+1+2+\dots+9=45$.

☛ **Критерии проверки.** Рассмотрение частных случаев — 0 баллов.

► **7-4.** Можно ли какие-нибудь 10 последовательных натуральных чисел расположить на каркасе пирамиды — по одному числу в 4-х вершинах и по одному числу в серединах 6-ти рёбер — так, чтобы в середине каждого ребра была написана половина суммы чисел, записанных на концах этого ребра?



✎ **Решение.** Нет, нельз. Предположим, что это возможно. Максимальное число не может находиться в середине ребра, так как число на одном из концов этого ребра больше него. Тем самым, максимальное число находится в одной из вершин; пусть это вершина A. Аналогично, минимальное число находится в некоторой вершине B. Но поскольку максимальное и минимальное числа разной чётности, в середине ребра AB должно стоять нецелое число. Противоречие

☛ **Критерии проверки.** Рассмотрение частных случаев — 0 баллов.

Доказано, что минимальное число или максимальное число или они оба должны стоять в вершинах — 3 балла.

► **7-5.** Однажды Вася купит три пончика: один с повидлом и два без повидла, одинаковых на внешний вид. И перепутал их! Однако дома у Васи есть три пончповидлометра — три прибора, которые опрделяют, есть ли повидло в одном положеннмм в прибор пончике. Один прибор всегда даёт верный ответ, второй — всегда неверный ответ, а третий даёт случайный ответ. Как Васе при помощи этих трёх пончповидлометров найти пончик с повидлом?

✎ **Решение.** Поместим один из пончиков во все три пончповидлометра по очереди. Два из них дадут одинаковые ответы, а третий — противоположный. Этот третий прибор не может быть тем, который выдает случайные ответы! Это — ключевая идея решения.

Осталось поместить в него все пончики по-очереди и по его ответам определить, выдает это прибор всегда верный ответ или всегда неверный. После чего уже понятно, в каком пончике есть повидло, а в каких двух его нет.

☛ **Критерии проверки.** В решении найден прибор, который выдаёт НЕслучайный ответ — 3 балла.

► **7-6.** Пираты сели по кругу делить добычу. У каждого из них есть несколько сапфиров и несколько изумрудов. Оказалось, что никакие два пирата, которые сидят **НЕ** рядом, не могут поделить между собой имеющиеся сапфиры и изумруды так, чтобы и сапфиров, и изумрудов у них стало поровну. Какое наибольшее количество пиратов могло быть?

✎ **Ответ.** 8.

✎ **Решение.** *Оценка.* Если два пирата не могут поделить сапфиры или изумруды, то количества сапфиров у них имеют разную чётность или количества изумрудов у них имеют разную чётность (возможно, и то, и другое). С точки зрения чётности чисел, существует четыре вида пар: (ч, ч), (ч, н), (н, ч), (н, н). Два пирата, у которых количества камней выражены парой одного вида, могут сидеть только рядом, иначе найдутся два пирата, не сидящих рядом, у которых чётности количества и сапфиров, и изумрудов совпадают, и тогда они смогут разделить добычу. Значит, каждой такой пары не может быть более двух в кругу. Следовательно, пиратов не более восьми.

Пример. (1, 1), (1, 1), (1, 2), (1, 2), (2, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 2).

Разумеется, возможны и другие примеры.

49 Всероссийская олимпиада школьников по математике
2022/2023 учебный год • Муниципальный этап • Ульяновская область

8 класс

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 3 часа 55 минут)

► **8-1.** В записи * + * + * + * + * + * + * + * = ** замените звёздочки **различными** цифрами так, чтобы равенство было верным.

✎ **Решение.** $1+2+4+5+7+8+9+0=36$.

☛ **Комментарий.** Можно показать, что приведенный пример единственен с точностью до порядка слагаемых в левой части. Действительно, пусть в правой части стоит число $\overline{ab}$. Так как сумма десяти различных цифр равна 45, то данное равенство можно записать в виде $45-a-b=10a+b$. Упрощая, получаем $11a+2b=45$. Далее перебором убеждаемся, что $a=3$ и $b=6$.

☛ **Критерии проверки.** Приведен верный ответ — 7 баллов.

Приведен неверный ответ (в частности, с повторяющимися цифрами) — 0 баллов.

► **8-2.** На уроке 10 школьников писали контрольную из 11 задач. Баллы за задачи определялись после проверки контрольной по правилу: если задачу решил 1 человек — 4 балла; если 2 человека — 2 балла; если 3 или 4 человека — 1 балл; если больше четырёх — 0 баллов. Если школьник задачу решил, то он получал за неё соответствующий балл, иначе — 0 баллов. Докажите, что какие-то два школьника набрали поровну баллов за контрольную.

✎ **Решение.** Каждая задача приносит суммарно человеку не более 4 баллов. Значит, сумма всех результатов — не более 44 баллов. Но если бы нашлось 10 различных результатов, их сумма оказалась бы не меньше $0+1+2+\dots+9=45$.

☛ **Критерии проверки.** Рассмотрение частных случаев — 0 баллов.

► **8-3.** Дан прямоугольный треугольник ABC (AB — гипотенуза). На большем катете AC треугольника ABC выбрана точка K так, что $AK=BK$. Пусть CH — высота треугольника ABC, а точка M на отрезке AH такова, что $BH=HM$. Докажите, что отрезки BK и CM перпендикулярны.

✎ **Решение.** Пусть P — точка пересечения отрезков BK и CM. Нам нужно доказать, что угол BPM прямой, то есть что сумма углов $\angle PMB=\angle CMB$ и $\angle PBM=\angle KBM$ равна 90°. Но угол CMB равен углу CBM, так как треугольник BCM — равнобедренный, а угол KBA равен углу CAB. Осталось заметить, что сумма углов CBA и CAB равна 90°.

► **8-4.** Пираты сели по кругу делить добычу. У каждого из них есть несколько сапфиров и несколько изумрудов. Оказалось, что никакие два пирата, которые сидят **НЕ** рядом, не могут поделить между собой имеющиеся сапфиры и изумруды так, чтобы и сапфиров, и изумрудов у них стало поровну. Какое наибольшее количество пиратов могло быть?

✎ **Ответ.** 8.

✎ **Решение.** *Оценка.* Если два пирата не могут поделить сапфиры или изумруды, то количества сапфиров у них имеют разную чётность или количества изумрудов у них имеют разную чётность (возможно, и то, и другое). С точки зрения чётности чисел, существует четыре вида пар: (ч, ч), (ч, н), (н, ч), (н, н). Два пирата, у которых количества камней выражены парой одного вида, могут сидеть только рядом, иначе найдутся два пирата, не сидящих рядом, у которых чётности количества и сапфиров, и изумрудов совпадают, и тогда они смогут разделить добычу. Значит, каждой такой пары не может быть более двух в кругу. Следовательно, пиратов не более восьми.

Пример. (1, 1), (1, 1), (1, 2), (1, 2), (2, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 2).

Разумеется, возможны и другие примеры.

☛ **Критерии проверки.** Только верный ответ — 0 баллов.

Только верный ответ и верный пример — 2 балла.

Только верный ответ и оценка — 4 балла.

► **8-5.** В шахматном турнире участвовали 50 шахматистов, каждый сыграл с каждым ровно один раз. В шахматах за победу даётся 1 очко, за ничью — 1/2, а за поражение — 0. У какого наибольшего числа шахматистов по окончании турнира могло оказаться ровно 7 очков?

✎ **Ответ.** 15.

✎ **Решение.** *Оценка.* Пусть N — количество шахматистов с 7 очками. В каждой игре между двумя играющими шахматистами разыгрывается 1 очко, поэтому сумма очков всех N шахматистов, набравших 7 очков, по окончании турнира не меньше $\frac{N(N-1)}{2}$. Следовательно, найдётся шахматист, у которого не менее $\frac{N-1}{2}$ очков. Поэтому если $N \geqslant 16$, то среди них найдётся тот, у которого не меньше 7.5 очков. Противоречие. Значит, $N \leqslant 15$.

Пример. Покажем, что значение $N = 15$ возможно. Разделим 50 шахматистов на две группы: в первой 15 человек, а во второй 35. Пусть в каждой группе каждый человек сыграл с каждым вничью, а также каждый человек из первой группы проиграл каждому человеку из второй группы. Легко видеть, что 7 очков набрали в точности все шахматисты в первой группе, и их 15. Возможно много других примеров.

☛ **Критерии проверки.** Только верный ответ — 0 баллов.

Только оценка — 4 балла.

Только пример — 3 балла.

► **8-6.** Натуральные числа a и b таковы, что $a + k$ делится на $b + k$ при всех натуральных $k < b$. Докажите, что $a - k$ делится на $b - k$ при всех натуральных $k < b$.

✎ **Решение.** Из условия следует, что число $a - b$ делится на любое число от $b + 1$ до $2b - 1$. Доказать же нужно, что оно делится на любое натуральное число $s < b - 1$. В последовательности $s, 2s, 3s, \ldots$ встретится число от $b + 1$ до $2b + 1$. Число $a - b$ делится на него, а потому и на s.

☛ **Критерии проверки.** Рассмотрение частных случаев — 0 баллов.

В решении есть явная переформулировка вида «Число $a - b$ делится на любое число от $b + 1$ до $2b - 1$. Доказать же нужно, что оно делится на любое натуральное число $s < b - 1$» — 3 балла.

49 Всероссийская олимпиада школьников по математике
2022/2023 учебный год • Муниципальный этап • Ульяновская область

9 класс

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 3 часа 55 минут)

► **9-1.** Саша и Петя переписывали в тетрадь квадратное уравнение вида $x^2+ax+b=0$. Саша неверно переписал в тетрадь коэффициент при x, то есть число a, и у его уравнения получилось два корня: -1 и -3. Петя неверно переписал в тетрадь свободный член b, и у его уравнения тоже получилось два корня: 16 и -2. Каковы корни у правильно переписанного в тетрадь уравнения?

✎ **Ответ.** 4 и -8.

✎ **Решение.** Уравнение Саши имеет вид $(x+1)(x+3)=x^2+4x+\boxed{3}=0$, а уравнение Пети имеет вид $(x-16)(x+2)=x^2-\boxed{14}x-32=0$, где в квадратики обведены неверные числа. Поэтому верное уравнение имеет вид $x^2+4x-32=(x-4)(x+8)=0$.

☛ **Критерии проверки.** Только верный ответ — 3 балла.

Подробно пояснять, почему уравнение с корнями a и b имеет вид $(x-a)(x-b)=0$, не нужно.

Так же можно было использовать теорему Виета для нахождения исходного уравнения.

Решения, в которых в теореме Виета перепутаны знаки чисел, оцениваются не более чем в 2 балла.

► **9-2.** На уроке 10 школьников писали контрольную из 11 задач. Баллы за задачи определялись после проверки контрольной по правилу: если задачу решил 1 человек — 4 балла; если 2 человека — 2 балла; если 3 или 4 человека — 1 балл; если больше четырёх — 0 баллов. Если школьник задачу решил, то он получал за неё соответствующий балл, иначе — 0 баллов. Докажите, что какие-то два школьника набрали поровну баллов за контрольную.

✎ **Решение.** Каждая задача приносит суммарно человеку не более 4 баллов. Значит, сумма всех результатов — не более 44 баллов. Но если бы нашлось 10 различных результатов, их сумма оказалась бы не меньше $0+1+2+\dots+9=45$.

☛ **Критерии проверки.** Рассмотрение частных случаев — 0 баллов.

► **9-3.** На дискотеке было 100 детей. Известно, что там не было семи или более мальчиков, у которых было бы поровну знакомых девочек. Каково наибольшее возможное количество мальчиков на дискотеке?

✎ **Ответ.** 86.

✎ **Решение.** *Оценка.* Пусть было d девочек и $100-d$ девочек. У каждого мальчика количество знакомых девочек не меньше 0 и не больше d, то есть может принимать $d+1$ значение. Если бы мальчиков было больше $6(d+1)$, среди них по принципу Дирихле нашлись шестеро с одинаковым количеством знакомых девочек. Значит, мальчиков не больше $6(d+1)$, получаем неравенство $100d \leqslant 6(d+1)$, откуда $d \geqslant 14$ и мальчиков не более 86.

Пример. Ровно 86 мальчиков могло быть: пусть для каждого целого $k \leqslant 0 \leqslant 14$ какие-то шесть мальчиков знакомы ровно с k произвольными девочками.

☛ **Критерии проверки.** Только оценка: 5 баллов.

Только верный ответ: 1 балл

Только верный ответ + пример на 86 мальчиков: 2 балла

Верное решение в предположении, что 0 знакомых у мальчика не бывает: 4 балла за полное решение.

► **9-4.** На полуокружности с диаметром AD отмечены точки B и C. Точка M — середина отрезка BC. Точка N такова, что M — середина отрезка AN. Докажите, что прямые BC и DN перпендикулярны.

✎ **Решение.** Пусть O – центр полуокружности. Так как M — середина BC, то $OM \perp BC$. Кроме того, OM — средняя линия треугольника AND, поэтому $O \| DN$. Следовательно, $DN \perp BC$.

✎ **Решение.** Из условия задачи следует, что $ABNC$ — параллелограмм. Поэтому $NC \| AB$ и $BN \| AC$. Вписанные углы ACD и ABD — прямые, так как они опираются на диаметр. Следовательно, $DC \perp BN$ и $DB \perp NC$. Значит, высоты треугольника DNB лежат на прямых DC и NC, тогда C — ортоцентр этого треугольника. Поэтому третья высота треугольника DNB лежит на прямой BC, то есть $BC \perp DN$.

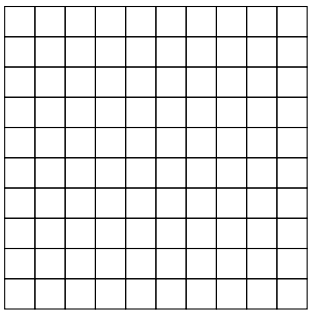
► **9-5.** Натуральные числа a и b таковы, что $a + k$ делится на $b + k$ при всех натуральных $k < b$. Докажите, что $a - k$ делится на $b - k$ при всех натуральных $k < b$.

✎ **Решение.** Из условия следует, что число $a - b$ делится на любое число от $b + 1$ до $2b - 1$. Доказать же нужно, что оно делится на любое натуральное число $s < b - 1$. В последовательности $s, 2s, 3s, \ldots$ встретится число от $b + 1$ до $2b + 1$. Число $a - b$ делится на него, а потому и на s.

☛ **Критерии проверки.** Рассмотрение частных случаев — 0 баллов.

В решении есть явная переформулировка вида «Число $a - b$ делится на любое число от $b + 1$ до $2b - 1$. Доказать же нужно, что оно делится на любое натуральное число $s < b - 1$» — 3 балла.

► **9-6.** Дан «скелет» клетчатого квадрата 10×10 (то есть множество из вертикальных и горизонтальных отрезков, делящих квадрат на квадратики со стороной 1, включая границу квадрата). Этот скелет разбили на уголки (из двух единичных отрезков) и отрезки длины 2 (тоже из двух единичных отрезков), без пропусков и перекрытий. Могло ли «отрезков длины 2» быть ровно 21?



скелет

уголки

отрезки длины 2

✎ **Ответ.** Не могло.

✎ **Решение.** Рассмотрим раскраску отрезков в два цвета: все вертикальные покрасим белым, а все горизонтальные — чёрным. Тогда в каждом уголке будет ровно по одному белому и одному чёрному отрезку, а в отрезке длины 2 — два одноцветных отрезка. Заметим, что всего покрашено $10 \times 11 = 110$ белых и 110 чёрных отрезков (всего 220 отрезков длины 1). Но 110 — чётное число, поэтому уголков будет чётное количество (ведь если нечётное, то оставшиеся чёрные отрезки — а их осталось нечётное число — надо будет покрыть отрезками длины 2, что невозможно). Но тогда и отрезков длины 2 также будет чётное количество, так уголков и отрезков длины 2 в сумме 110.

☛ **Критерии проверки.** Рассмотрение частных случаев — 0 баллов.

За нахождение чисел 110 и 220 баллы не начисляются.

49 Всероссийская олимпиада школьников по математике
2022/2023 учебный год • Муниципальный этап • Ульяновская область

10 класс

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 3 часа 55 минут)

► **10-1.** Саша и Петя переписывали в тетрадь квадратное уравнение вида $x^2 + ax + b = 0$. Саша неверно переписал в тетрадь коэффициент при x, то есть число a, и у его уравнения получилось два корня: -1 и -3. Петя неверно переписал в тетрадь свободный член b, и у его уравнения тоже получилось два корня: 16 и -2. Каковы корни у правильно переписанного в тетрадь уравнения?

✎ **Ответ.** 4 и -8.

✎ **Решение.** Уравнение Саши имеет вид $(x+1)(x+3) = x^2 + 4x + \boxed{3} = 0$, а уравнение Пети имеет вид $(x-16)(x+2) = x^2 - \boxed{14}x - 32 = 0$, где в квадратики обведены неверные числа. Поэтому верное уравнение имеет вид $x^2 + 4x - 32 = (x-4)(x+8) = 0$.

☛ **Критерии проверки.** Только верный ответ — 3 балла.

Подробно пояснять, почему уравнение с корнями a и b имеет вид $(x-a)(x-b) = 0$, не нужно.

Так же можно было использовать теорему Виета для нахождения исходного уравнения.

Решения, в которых в теореме Виета перепутаны знаки чисел, оцениваются не более чем в 2 балла.

► **10-2.** Даны n ($n > 3$) различных чисел. Их расставляют по кругу и находят все разности между числом и следующим за ним по часовой стрелке (от числа отнимают следующее по часовой стрелке число). Докажите, что числа можно расставить так, чтобы произведение всех n полученных разностей было положительным.

✎ **Решение.** Достаточно расставить числа так, чтобы они по часовой стрелке убывали от наибольшего до наименьшего, а потом поменять местами самое большое число со вторым по величине.

☛ **Критерии проверки.** Решение проходит или только для чётного n, или только для нечётного n — не более 3-х баллов.

Решение на конкретных примерах — 1 балл.

► **10-3.** У антиквара есть 10 гирек различной массы. Для каждого набора своих гирек (в наборе есть хотя бы одна гирька) антиквар посчитал суммарную массу этого набора. Когда он выписал все эти числа, среди них оказалось ровно 1022 различных. Докажите, что **ВСЕ** гири можно разделить на две группы так, чтобы суммарные массы гирь в группах были равны.

✎ **Решение.** Всего можно сделать 1024 разных непустых наборов. Поскольку по условию получилось 1022 разных значений масс наборов, то ровно одна масса получается из двух наборов, а все остальные получаются один раз. Поэтому есть ровно одна пара наборов с равными массами. Возьмём эту пару. У этих наборов нет общих гирь, иначе при удалении из обеих наборов получим новую пару. Кроме того, эта пара в объединении обязана содержать все гири, иначе при добавлении гири, которой нигде нет, получим новую пару наборов с равными массами. Тогда именно эта пара даёт нужное нам разбиение.

☛ **Критерии проверки.** Замечено, что есть ровно два набора с равными массами, других содержательных продвижений нет, — 2 балла.

В дополнение к этому доказано ровно одно из двух утверждений: почему эти наборы не пересекаются или почему в эти наборы входят все гири — 5 баллов.

► **10-4.** На продолжении стороны AC треугольника ABC за точку C выбрана точка D. Пусть S_1 — окружность, описанная около треугольника ABD, S_2 — окружность, описанная около треугольника CBD. Касательная к окружности S_1, проходящая через точку A, и касательная к окружности S_2, проходящая через точку C, пересекаются в точке P. Докажите, что точка P лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

✎ **Решение.** По свойству угла между касательной и хордой, $\angle BAP = \angle BDA$. Аналогично, $\angle BCP = \angle BDC = \angle BDA$. Значит, углы BAP и BCP, опирающиеся на отрезок BP, равны. Но это означает, что четырёхугольник $APBC$ можно вписать в окружность. То есть точка P лежит на окружности, проходящей через вершины треугольника ABC.

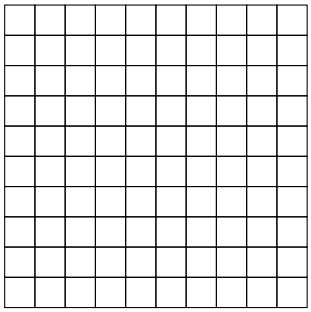
► **10-5.** Натуральные числа a и b таковы, что $a + k$ делится на $b + k$ при всех натуральных $k < b$. Докажите, что $a - k$ делится на $b - k$ при всех натуральных $k < b$.

✎ **Решение.** Из условия следует, что число $a - b$ делится на любое число от $b + 1$ до $2b - 1$. Доказать же нужно, что оно делится на любое натуральное число $s < b - 1$. В последовательности $s, 2s, 3s, \ldots$ встретится число от $b + 1$ до $2b + 1$. Число $a - b$ делится на него, а потому и на s.

☛ **Критерии проверки.** Рассмотрение частных случаев — 0 баллов.

В решении есть явная переформулировка вида «Число $a - b$ делится на любое число от $b + 1$ до $2b - 1$. Доказать же нужно, что оно делится на любое натуральное число $s < b - 1$» — 3 балла.

► **10-6.** Дан «скелет» клетчатого квадрата 10×10 (то есть множество из вертикальных и горизонтальных отрезков, делящих квадрат на квадратики со стороной 1, включая границу квадрата). Этот скелет разбили на уголки (из двух единичных отрезков) и отрезки длины 2 (тоже из двух единичных отрезков), без пропусков и перекрытий. Могло ли «отрезков длины 2» быть ровно 21?



скелет

уголки

отрезки длины 2

✎ **Ответ.** Не могло.

✎ **Решение.** Рассмотрим раскраску отрезков в два цвета: все вертикальные покрасим белым, а все горизонтальные — чёрным. Тогда в каждом уголке будет ровно по одному белому и одному чёрному отрезку, а в отрезке длины 2 — два одноцветных отрезка. Заметим, что всего покрашено $10 \times 11 = 110$ белых и 110 чёрных отрезков (всего 220 отрезков длины 1). Но 110 — чётное число, поэтому уголков будет чётное количество (ведь если нечётное, то оставшиеся чёрные отрезки — а их осталось нечётное число — надо будет покрыть отрезками длины 2, что невозможно). Но тогда и отрезков длины 2 также будет чётное количество, так уголков и отрезков длины 2 в сумме 110.

☛ **Критерии проверки.** Рассмотрение частных случаев — 0 баллов.

За нахождение чисел 110 и 220 баллы не начисляются.

49 Всероссийская олимпиада школьников по математике
2022/2023 учебный год • Муниципальный этап • Ульяновская область

11 класс

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 3 часа 55 минут)

► **11-1.** Петя написал числа 1, 2, 5, 7 в круг. Затем между каждыми двумя числами он вписал их сумму, получив уже 10 чисел. Затем он снова между каждыми двумя числами вписал их сумму, получив уже 20 чисел. И такую операцию — между каждыми двумя числами вписывать их сумму — Петя проделал 1000 раз. Чему равна сумма всех чисел в кругу после 1000 операций?

✎ **Ответ.** $15 \cdot 3^{1000}$.

✎ **Решение.** Заметим, что после каждой операции сумма записанных чисел утраивается. Действительно, каждое из ранее написанных чисел будет входить в число слева и справа от него. Значит, каждое число будет учитываться ровно 3 раза в новой сумме. Изначальная сумма равна $1+2+5+7=15$. Тогда после 1000 операций она станет равна $15 \cdot 3^{1000}$.

► **11-2.** Даны n ($n > 3$) различных чисел. Их расставляют по кругу и находят все разности между числом и следующим за ним по часовой стрелке (от числа отнимают следующее о часовой стрелке число). Докажите, что числа можно расставить так, чтобы произведение всех n полученных разностей было положительным.

✎ **Решение.** Достаточно расставить числа так, чтобы они по часовой стрелке убывали от наибольшего до наименьшего, а потом поменять местами самое большое число со вторым по величине.

☛ **Критерии проверки.** Решение проходит или только для чётного n, или только для нечётного n — не более 3 балла.

Решение на конкретных примерах — 1 балл.

► **11-3.** У антиквара есть 10 гирек различной массы. Для каждого набора своих гирек (в наборе есть хотя бы одна гирька) антиквар посчитал суммарную массу этого набора. Когда он выписал все эти числа, среди них оказалось ровно 1022 различных. Докажите, что **ВСЕ** гири можно разделить на две группы так, чтобы суммарные массы гирь в группах были равны.

✎ **Решение.** Всего можно сделать 1024 разных непустых наборов. Поскольку по условию получилось 1022 разных значений масс наборов, то ровно одна масса получается из двух наборов, а все остальные получаются один раз. Поэтому есть ровно одна пара наборов с равными массами. Возьмём эту пару. У этих наборов нет общих гирь, иначе при удалении из обеих наборов получим новую пару. Кроме того, эта пара в объединении обязана содержать все гири, иначе при добавлении гири, которой нигде нет, получим новую пару наборов с равными массами. Тогда именно эта пара даёт нужное нам разбиение.

☛ **Критерии проверки.** Замечено, что есть ровно два набора с равными массами, других содержательных продвижений нет, — 2 балла.

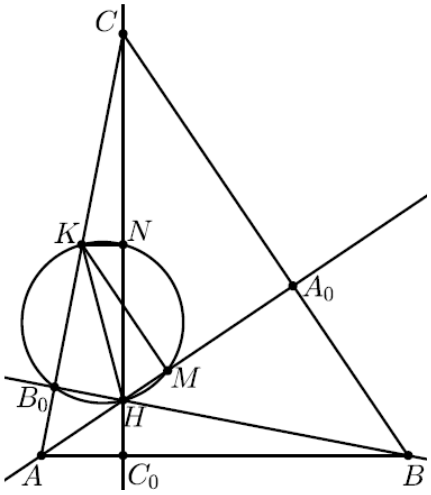
В дополнение к этому доказано ровно одно из двух утверждений: почему эти наборы не пересекаются или почему в эти наборы входят все гири — 5 баллов.

► **11-4.** Докажите, что существует лишь конечное множество целых чисел b таких, что оба квадратных трёхчлена $x^2 + 2020x + b$ и $x^2 + 2021x + b$ имеют целые корни.

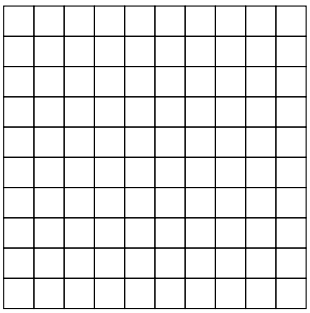
✎ **Решение.** Если у трехчлена $x^2 + 2020x + b$ есть целые корни, то его дискриминант является точным квадратом: $2020^2 - 4b = m^2$, аналогично $2021^2 - 4b = n^2$ для некоторых целых m, n. Тогда $4041 = n^2 - m^2 = (n-m)(n-m)$, но такое уравнение имеет конечное количество решений в целых числах, следовательно найдется лишь конечное количество таких b.

► **11-5.** Пусть AA_0, BB_0 и CC_0 — высоты остроугольного треугольника ABC, H — точка пересечения высот. Точки M и N — середины высот AA_0 и CC_0. Докажите, что точки M, N, B_0, H лежат на одной окружности.

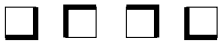
✎ **Решение.** Пусть K — середины стороны AC. Тогда KN — средняя лини ятреугольника AC_0C, поэтому $KN \| AC_0$, откуда $\angle KNH = 90^\circ$. Аналогично, $\angle KMH = 90^\circ$. Кроме того, $\angle KB_0H = 90^\circ$, откуда все пять точек M, N, B_0, H, K лежат на одной окружности.



► **11-6.** Дан «скелет» клетчатого квадрата 10×10 (то есть множество из вертикальных и горизонтальных отрезков, делящих квадрат на квадратики со стороной 1, включая границу квадрата). Этот скелет разбили на уголки (из двух единичных отрезков) и отрезки длины 2 (тоже из двух единичных отрезков), без пропусков и перекрытий. Могло ли «отрезков длины 2» быть ровно 21?



скелет



уголки

отрезки длины 2

✎ **Ответ.** Не могло.

✎ **Решение.** Рассмотрим раскраску отрезков в два цвета: все вертикальные покрасим белым, а все горизонтальные — чёрным. Тогда в каждом уголке будет ровно по одному белому и одному чёрному отрезку, а в отрезке длины 2 — два одноцветных отрезка. Заметим, что всего покрашено $10 \times 11 = 110$ белых и 110 чёрных отрезков (всего 220 отрезков длины 1). Но 110 — чётное число, поэтому уголков будет чётное количество (ведь если нечётное, то оставшиеся чёрные отрезки — а их осталось нечётное число — надо будет покрыть отрезками длины 2, что невозможно). Но тогда и отрезков длины 2 также будет чётное количество, так уголков и отрезков длины 2 в сумме 110.

☛ **Критерии проверки.** Рассмотрение частных случаев — 0 баллов.

За нахождение чисел 110 и 220 баллы не начисляются.