5 класс (продолжительность — 3.5 часа)

5-1. Вася ехал на машине, до светофора было 500 метров. И тут Вася увидел пять ворон, неподвижно сидящих вдоль дороги. Сумма расстояний до них тоже была 500 метров. Через какое-то время Вася проехал все пять ворон, но не доехал до светофора. И снова сумма расстояний до ворон оказалось 500 метров! Каково было в этот момент расстояние до светофора?

Ответ. 300 метров.

Решение. Пусть изначально Вася был в точке A, а затем оказался в точке B. Тогда все вороны находятся на отрезке AB, поэтому сумма расстояний от каждой их них до точек A и B одинакова. Если сложить эти расстояния для всех пяти ворон, то сумма будет равна $500 + 500 = 1000$ м. Следовательно, длина отрезка AB равна $1000 : 5 = 200$ м, откуда получаем, что расстояние от точки B до светофора равно $500 - 200 = 300$ м.

5-2. За круглым столом сидят 100 человек, каждый из которых или рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжет. Им раздали по одной карточке с числами $1, 2, 3, \ldots, 100$, все карточки различны. Каждый увидел числа у своих соседей и сказал: «Моё число больше, чем у двух моих соседей!» После этого n людей сказали: «Моё число меньше, чем у двух моих соседей!» При каком наибольшем n такое могло произойти? Приведите пример такого количества и докажите, что большего числа быть не может.

Ответ. 98.

Решение. Пусть Мин и Макс — люди, которым досталось наименьшее и наибольшее число. Так как они сказали фразу из условия, то Мин — лжец, а Макс — рыцарь. Поэтому сказать вторую фразу они не могли. Тем самым вторую фразу сказали не более 98 человек.

Приведем пример, показывающий, что 98 человек могли сказать вторую фразу. Раздадим карточки в порядке: $1, 2, 3, \ldots, 100$. При этом карточка 100 будет у рыцаря, а все остальные — у лжецов. Все условия выполнены.

5-3. На конкурсе головоломок было 10 детей, все решали общие 10 головоломок. Все участники решили разное число головоломок, а каждая головоломка была решена одинаковым количеством участников. Толя решил головоломки №1-№4 и не решил головоломки №5-№9. Можно ли узнать, решил ли он головоломку №10?

Ответ. Не решил.

Решение. Всего участники решили в сумме от $0+1+\ldots+9 = 45$ до $1+2+\ldots+10 = 55$ головоломок. Так как каждую головоломку решило поровну участников, то всего было решено 50 головоломок. Поэтому среди участников не было того, кто решил 5 головоломок. Следовательно, Толя не решил головоломку №10, иначе он был бы тем, кто решил ровно 5 головоломок.

5-4. Панда и Вомбат играют в игру, делая ходы по очереди, начинает Панда. Сначала Панда ставит фишку на любую клетку полоски 1×1000. Далее, начиная с Вомбата, игроки по очереди двигают фишку влево или вправо либо на 1, либо на 4, либо на 7 клеток. Нельзя выходить за пределы полоски и нельзя ставить фишку на клетку, где она уже была. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может выиграть в этой игре вне зависимости от действий соперника?

Ответ. Вомбат может выиграть.

Решение. Вомбат разбивает полоску на доминошки. И если Панда куда-то поставила фишку, то Вомбат передвигает её в соседнюю клетку доминошки.

5-5. У кошатницы Изольды живёт много котов. Каждый день у всех котов, за исключением одного, увеличивается и вес, и блеск шерсти; а у оставшегося кота — только одно из этих качеств, а с другим может происходить что угодно. После 45 дней оказалось, что все коты стали такими же, как были в начале. Найдите наибольшее возможное количество котов у Изольды. Приведите пример такого количества и докажите, что большего числа котов быть не может.

Ответ. 22.

Решение. Может ли какое-то качество у некоторого кота всё время увеличиваться? Нет, ведь иначе он не вернется к начальному состоянию. Значит, у каждого кота каждое качество хоть раз ухудшалось. Но в день происходит ухудшение не более одного качества. Поэтому если бы котов было $\geqslant 23$, то понадобилось бы $\geqslant 46$ дней, чтобы смогли произойти все ухудшения их качеств. Противоречие. Значит, котов не более 22.

Приведем пример, что котов могло быть 22. У них 44 качества. В день номер N (где N равно $1, 2, 3, \ldots, 44$) будем качество номер N ухудшать в 2^{44} раз, а все остальные качества улучшать в 2 раза. В 45 день все качества улучшим в 2 раза. Тогда все качества за 45 дней не изменились .

5-6. У кошатницы Изольды было 33 кота одинакового веса. Однажды один кот тайком съел сметану у хозяйки, и поэтому стал весить больше остальных котов. Изольда хочет уличить проказника!

У неё есть большие весы с двумя чашами, на которые можно помещать котов, и весы покажут равновесие или какая чаша перевесила. Однако если два кота хоть раз побывали вместе на одной чаше, то они обиделись друг на друга, и поэтому больше НА ОДНУ чашу их Изольда никак не сможет поместить — коты будут сопротивляться!

Как Изольде найти проказника не более чем за 4 взвешивания?

Решение. Пронумеруем котов $1, 2, \ldots, 33$.

1) Первым взвешиванием Изольда помещает на весы котов 1-7 и 8-14. Если одна из чаш перевесила, то один из семи котов на ней проказник! Далее Изольда разбивает 6 котов на 3 пары, один кот остается. Следующими тремя взвешиваниями Изольда взвешивает котов в парах. Если хоть в одном взвешивании было неравновесие, то тяжелый кот найден. Если всегда было равновесие, то тяжелый кот — оставшийся.

2) Пусть при первом взвешивании было равновесие. Тогда коты 1-14 сметану не ели, и проказник имеет номер от 15 до 33. Изольда взвесит тогда 5 и 5 котов: 15-19 и 20-24. Если весы покажут неравновесие, то проказник среди 5-ти котов на более тяжелой чаше. Как и в случае 1, разбиваем их на 2 пары и ещё одного оставшегося кота, делаем два взвешивания в парах. Или хоть один раз в паре будет неравновесие, и проказник обнаружен, или оба раза равновесие, тогда сметану съел оставшийся кот.

3) Пусть во взвешивании 5 и 5 было равновесие. Тогда проказник среди котов 25-33. Изольда взвесит тогда 3 и 3 кота: 25, 26, 27 и 28, 29, 30. Если весы покажут неравновесие, то проказник среди 3-х котов на более тяжелой чаше. Как и в случаях 1 и 2, разбиваем их на 1 пару и ещё одного оставшегося кота, делаем взвешивание в паре. Или в паре будет неравновесие, и проказник обнаружен, или равновесие, тогда сметану съел оставшийся кот.

4) Пусть во взвешивании 3 и 3 было равновесие. Тогда проказник среди котов 31, 32, 33. Изольда взвесит тогда 31-го и 32-го кота: если весы покажут неравновесие, то проказник обнаружен, а если равновесие, то сметану съел оставшийся 33-й кот.

6 класс (продолжительность — 3.5 часа)

6-1. Невезучая тётя Тамара купила в магазине 20 продуктов. Но кассовый аппарат испортился! Вместо того, чтобы напечатать на чеке все стоимости продуктов и общую сумму, он напечатал все стоимости и среднее арифметическое этих стоимостей, да ещё это среднее арифметическое напечатал на чеке не в конце, а в неизвестном месте списка. Как тёте Тамаре узнать, глядя на чек, общую стоимость покупок?

Решение. Пусть S – общая стоимость всех покупок. Сложим все числа на чеке, получим $S + \frac{1}{20}S = \frac{21}{20}S$. Поэтому тёте Тамаре надо сложить все числа на чеке и умножить результат на $\frac{20}{21}$ — получится общая стоимость всех покупок.

6-2. На конкурсе головоломок было 10 детей, все решали общие 10 головоломок. Все участники решили разное число головоломок, а каждая головоломка была решена одинаковым количеством участников. Толя решил головоломки №1-№4 и не решил головоломки №5-№9. Можно ли узнать, решил ли он головоломку №10?

Ответ. Не решил.

Решение. Всего участники решили в сумме от $0+1+\ldots+9 = 45$ до $1+2+\ldots+10 = 55$ головоломок. Так как каждую головоломку решило поровну участников, то всего было решено 50 головоломок. Поэтому среди участников не было того, кто решил 5 головоломок. Следовательно, Толя не решил головоломку №10, иначе он был бы тем, кто решил ровно 5 головоломок.

6-3. В соревновании участвовало 60 спортсменов, все заняли разные места с 1 по 60. А затем к окончательному подведению итогов подключились команды юристов! В результате под теми или иными предлогами несколько спортсменов было дисквалифицировано, в результате чего все оставшиеся спортсмены поднялись вверх. Оказалось, что все оставшиеся спортсмены поднялись вверх на разное строго положительное количество мест. Какое наименьшее число спортсменов могло быть дисквалифицировано?

Ответ. 30.

Решение. Рассмотрим двух спортсменов, занявших соседние места. Если их обоих не дисквалифицируют, то они по-прежнему будут занимать соседние места, значит передвинутся на одинаковое число мест. Таким образом, хотя бы одного из них дисквалифицируют. Тогда количество дисквалифицированных хотя бы 30.

Приведем пример, показывающий, что 30 спортсменов могли быть дисквалифицированы. Если дисквалифицируют всех, стоящих на чётных местах, то между каждыми двумя оставшимися количество мест сократится, значит, они передвинутся на разное количество мест.

6-4. Коля нарисовал по клеточкам квадрат с нечётной стороной. Оказалось, что для некоторого натурального n этот квадрат можно разрезать на квадраты размеров $n \times n$ и $(n+1) \times (n+1)$. Докажите, что это можно сделать, используя лишь квадратики одного из этих двух видов.

Решение. Пусть исходный квадрат имеет размеры $m \times m$. Покрасим его в 2 цвета в вертикальную полоску (чёрный столбец, белый столбец, чёрный столбец, белый столбец, $\ldots$, чёрный столбец). Будем следить за разностью количества чёрный и белых клеток. С одной стороны, она равна m (именно здесь мы используем, что m нечётно).

С другой стороны, ровно одно из чисел n и $n+1$ чётно, обозначим его за k. Квадраты размера $k \times k$ занимают поровну чёрных и белых клеток, а в квадратах второго типа (пусть размера $l \times l$) разница между количеством чёрных и белых клеток равна l. Тогда получаем, что m делится на l! Тем самым исходный квадрат можно порезать на квадраты $l \times l$, где l — это то число из n и $n+1$, которое нечётно.

6-5. В гостиницу заселилось 1000 человек в 500 двухместных номеров. Эти люди были из 32 стран. Оказалось, что нельзя выбрать два номера так, чтобы в них жили представители ровно двух стран. Докажите, что из какой-то страны в гостиницу заселилось не меньше 70 человек.

Решение. Возможны два случая.

1) В каждом номере живут люди из разных стран. Тогда из условия следует, что для каждых двух стран может быть не более одного номера, в котором живут представители этих стран. Значит, количество номеров не превосходит 31 496, а журналистов, приехавших на чемпионат мира, не больше $496 \times 2 = 992$. Противоречие.

2) В каком-то номере живут люди из одной страны (допустим, из S). Тогда люди из S живут только друг с другом, и больше ни для какой другой страны её жители не могут жить вместе (иначе образуется запрещённая пара номеров). Аналогично предыдущему случаю получаем, что жителей не из S не больше $\frac{31 \cdot 30}{2} = 930$, поэтому из S их приехало не меньше 70.

6-6. По кругу расположены 77 изначально пустых корзин. Панда и Вомбат играют в игру, делая ходы по очереди. Начинает Панда. За ход можно положить в любую пустую корзину K яблоко. Если при этом окажется, что в каждой из двух соседних с K корзин есть по яблоку, то сделавший ход забирает себе по яблоку из этих двух соседних корзин (из самой корзины K яблоко не забирается). Выигрывает тот, кто первым наберет 1000 яблок. Кто может выиграть в этой игре вне зависимости от действий соперника?

Ответ. Панда.

Решение. Заметим, что после каждого хода общее количество яблок либо увеличивается на 1, либо уменьшается на 1, поэтому перед ходом Панды всегда будет нечётное количество свободных корзин. Значит, среди блоков пустых корзин будет хотя бы один блок нечётной длины. Если Панда может сходить так, чтобы забрать призовые яблоки, то она так и ходит. Иначе пусть Панда положит яблоко в крайнюю корзину нечётного блока пустых корзин, делая его чётным (особый случай: первый ход — в любую корзину).

Что же вынужден делать следующим ходом Вомбат? Вомбат после такого хода Панды не сможет сходить так, чтобы забрать призовые яблоки! В самом деле, в «старое» пустое место между двумя занятыми корзинами яблоко положить не получится (иначе Панда туда бы и положила яблоко), а новой одиночной пустой корзины не образовалось из-за чётности. Таким образом, Вомбат будет иметь возможность брать призовые яблоки лишь только после ходов Панды, когда и та берёт призовые яблоки. Значит, у Панды их всегда будет не меньше, чем у Вомбата, и именно Панда первой соберёт 100 призовых яблок.

7 класс (продолжительность — 4 часа)

7-1. Невезучая тётя Тамара купила в магазине 20 продуктов. Но кассовый аппарат испортился! Вместо того, чтобы напечатать на чеке все стоимости продуктов и общую сумму, он напечатал все стоимости и среднее арифметическое этих стоимостей, да ещё это среднее арифметическое напечатал на чеке не в конце, а в неизвестном месте списка. Как тёте Тамаре узнать, глядя на чек, общую стоимость покупок?

Решение. Пусть S – общая стоимость всех покупок. Сложим все числа на чеке, получим $S + \frac{1}{20}S = \frac{21}{20}S$. Поэтому тёте Тамаре надо сложить все числа на чеке и умножить результат на $\frac{20}{21}$ — получится общая стоимость всех покупок.

7-2. Коля нарисовал по клеточкам квадрат с нечётной стороной. Оказалось, что для некоторого натурального n этот квадрат можно разрезать на квадраты размеров $n \times n$ и $(n+1) \times (n+1)$. Докажите, что это можно сделать, используя лишь квадратики одного из этих двух видов.

Решение. Пусть исходный квадрат имеет размеры $m \times m$. Покрасим его в 2 цвета в вертикальную полоску (чёрный столбец, белый столбец, чёрный столбец, белый столбец, $\ldots$, чёрный столбец). Будем следить за разностью количества чёрный и белых клеток. С одной стороны, она равна m (именно здесь мы используем, что m нечётно).

С другой стороны, ровно одно из чисел n и $n+1$ чётно, обозначим его за k. Квадраты размера $k \times k$ занимают поровну чёрных и белых клеток, а в квадратах второго типа (пусть размера $l \times l$) разница между количеством чёрных и белых клеток равна l. Тогда получаем, что m делится на l! Тем самым исходный квадрат можно порезать на квадраты $l \times l$, где l — это то число из n и $n+1$, которое нечётно.

7-3. По кругу расположены 77 изначально пустых корзин. Панда и Вомбат играют в игру, делая ходы по очереди. Начинает Панда. За ход можно положить в любую пустую корзину K яблоко. Если при этом окажется, что в каждой из двух соседних с K корзин есть по яблоку, то сделавший ход забирает себе по яблоку из этих двух соседних корзин (из самой корзины K яблоко не забирается). Выигрывает тот, кто первым наберет 1000 яблок. Кто может выиграть в этой игре вне зависимости от действий соперника?

Ответ. Панда.

Решение. Заметим, что после каждого хода общее количество яблок либо увеличивается на 1, либо уменьшается на 1, поэтому перед ходом Панды всегда будет нечётное количество свободных корзин. Значит, среди блоков пустых корзин будет хотя бы один блок нечётной длины. Если Панда может сходить так, чтобы забрать призовые яблоки, то она так и ходит. Иначе пусть Панда положит яблоко в крайнюю корзину нечётного блока пустых корзин, делая его чётным (особый случай: первый ход — в любую корзину).

Что же вынужден делать следующим ходом Вомбат? Вомбат после такого хода Панды не сможет сходить так, чтобы забрать призовые яблоки! В самом деле, в «старое» пустое место между двумя занятыми корзинами яблоко положить не получится (иначе Панда туда бы и положила яблоко), а новой одиночной пустой корзины не образовалось из-за чётности. Таким образом, Вомбат будет иметь возможность брать призовые яблоки лишь только после ходов Панды, когда и та берёт призовые яблоки. Значит, у Панды их всегда будет не меньше, чем у Вомбата, и именно Панда первой соберёт 100 призовых яблок.

7-4. Треугольник ABC таков, что $\angle C = 60^\circ$ и $AC < BC$. Точка D на стороне BC такова, что $BD = AC$. Точка E на прямой AC такова, что $EC = AC$ и $E \neq A$. Докажите, что $DE = AB$.

Решение. Отметим на отрезке BC такую точку F, что $CF = AC$. Тогда треугольник ACF будет равносторонним, следовательно, $AF = CE$. Треугольники ECD и AFB равны по первому признаку ($EC = AF$, $CD = AF$, $\angle ECD = \angle AFB = 120°$), откуда $ED = AB$.

7-5. По кругу записаны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Оказалось, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, 100$ выполнено неравенство $a_i a_{i+1} < a_{i+2}$ (считаем, что нумерация индексов циклическая, то есть что $a_{101} = a_1$ и $a_{102} = a_2$). Какое наибольшее количество чисел, не меньших 1, может быть среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$?

Ответ. 49.

Решение. 1) Могут ли быть два числа $\geqslant 1$ подряд? Нет. В самом деле, пусть без ограничения общности $a_1 \geqslant 1$ и $a_2 \geqslant 1$. Тогда $a_3 > a_1 a_2 \geq a_2 \geq 1$, и т.д, поэтому последовательность a_i чисел по кругу строго увеличивается, начиная с a_2, что невозможно. Таким образом, имеется не более 50 чисел, не меньших 1.

2) Может ли быть ровно 50 чисел, не меньших 1? Нет. В самом деле, тогда никакие два не стоят рядом (иначе рассуждаем как в пункте 1). Поэтому числа $\geqslant 1$ и < 1 чередуются:

$$n_1, x_1, n_2, x_2, ..., n_{50}, x_{50},$$

где $n_i \geqslant 1$, $x_i < 1$. Но тогда $x_2 > a_1 n_1 \geq x_1$, то есть последовательность x_i чисел по кругу является строго возрастающий, что невозможно.

3) Осталось привести пример на 49 чисел $\geqslant 1$: $1, \frac{1}{50^2}, 1, \frac{2}{50^2}, 1, \frac{3}{50^2}, \ldots, 1, \frac{49}{50^2}, \frac{50}{50^2}, \frac{49.5}{50^3}$. Конечно, есть много других примеров.

7-6. На острове живет 140 человек, каждый или рыцарь, или лжец. У каждого от 1 до 5 знакомых включительно. Каждый заявил: «Среди моих знакомых ровно 2 лжеца!» Чему равно наибольшее возможное количество рыцарей на острове?

Ответ. 100.

Решение. Пусть на острове L лжецов и R рыцарей. Обозначим за a количество рёбер в графе знакомств, соединяющих рыцаря и лжеца. Посчитаем a двумя способами.

1) $a = 2R$, так как у каждого рыцаря ровно два знакомых лжеца.

2) $a \leqslant 5L$, так как у каждого лжеца не более пяти знакомых рыцарей, ведь всего у него не более пяти знакомств.

Итого $2R \leqslant 5L$, то есть $R \leqslant \frac{5}{7}(R + L) = \frac{5}{7}140 = 100$.

Осталось построить пример, в котором рыцарей ровно 100. Для этого разделим людей на семёрки, в каждой 5 рыцарей и 2 лжеца. Знакомств будут только внутри семёрок: в каждой семёрке каждый рыцарь знаком с каждым лжецом, других знакомств нет. Для этого примера выполнены все условия задачи.

8 класс (продолжительность — 4 часа)

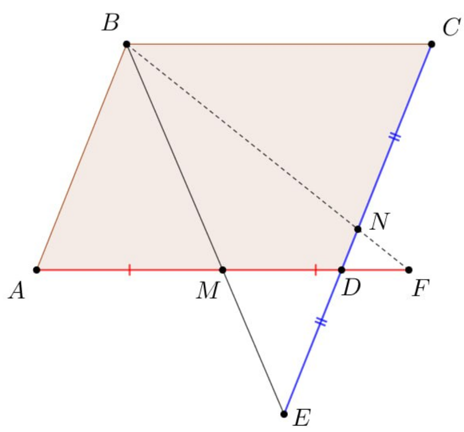
8-1. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b существуют натуральные числа x и y такие, что
$$\frac{x}{y+a}+\frac{y}{x+b}=\frac{3}{2}.$$

Решение. Положим $x=2a+b$, $y=2b+a$.

8-2. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $a+c \leqslant ac$ и $b+d \leqslant bd$. Докажите, что
$$ab+cd \geqslant 8.$$

Решение. Имеем $ac \geqslant a+c \geqslant 2\sqrt{ac} \implies ac \geqslant 4$. Аналогично, $bd \geqslant 4$.
Но тогда
$$ab+cd \geqslant 2\sqrt{ac \cdot bd} \geqslant 2 \cdot 4 = 8.$$

8-3. Дан параллелограмм $ABCD$. На продолжении стороны AD за точку D выбрана точка F, а на продолжении стороны CD за точку D выбрана точка E. M — середина AF, N — середина CE. Оказалось, что точки B, M, E лежат на одной прямой. Докажите, что точки B, N, F тоже лежат на одной прямой.



Решение. Проведём через точку F, прямую параллельную AB, пусть она пересекает BC в точке T, а BM в точке K. Тогда MF параллельно BT и равно половине BT (из равенства треугольников BMA и KMF). Следовательно, MF — средняя линия треугольника BKT, откуда F — середина KT. Осталось воспользоваться замечательным свойством трапеции $KECT$: середины N и F её оснований и точка пересечения продолжений боковых сторон (точка B) лежат на одной прямой.

Решение. Пусть N_1 — пересечение BF и CD. Треугольники ABF и BN_1C подобны по трём углам. Отметим середину BC — точку Z. Тогда углы FMB и BZN_1 равны (как соответствующие элементы в подобных треугольниках — углы между медианами и сторонами). Следовательно, $N_1Z \| BE$. Значит, в треугольнике BCE отрезок ZN_1 является средней линий (ибо проходит через середину BC и параллелен BE). Поэтому N_1 — середина CD, то есть $N_1 = N$, что и требовалось доказать.

8-4. На круговой ленте записаны в произвольном порядке 22 единицы, 10 двоек и 10 троек. Докажите, что эту ленту удастся разрезать на две части с равными суммами чисел в частях.

Решение. Нам надо научиться выбирать несколько подряд идущих чисел с суммой $S/2$, где S — сумма всех чисел на ленте. На ленте точно будут 2 единицы подряд. Возьмем их и следующие несколько чисел по часовой стрелке. Эти числа будем выбирать так: сначала одно, потом два, потом три и т.д., пока или не наберем ровно $S/2$ (и тогда задача решена), или в первый раз не превысим $S/2$.

Если $S/2$ превышено, то превышение равно или 1, или 2. Если превышение равно 1, то не возьмем первую единицу, тогда получим сумму $S/2$ — победа. Если превышение равно 2, то не возьмем две первые единицы, и тоже победа.

8-5. Натуральные числа $13, 133, 1333, \ldots$ будем называть *особыми*. Имеется полоска со 100 клетками. Панда и Вомбат играют в игру, делая ходы по очереди, начинает Панда. За ход можно написать в самую левую незаполненную клетку любую цифру (первым ходом нельзя писать 0). Когда все 100 клеток заполнены, то если считывать цифры слева направо, то получится 100-значное число. Панда победит, если оно не делится ни на одно особое число, а Вомбат победит, если делится хоть на одно особое число. Кто может выиграть в этой игре вне зависимости от действий соперника?

Ответ. Выигрывает Панда.

Решение. Обозначим число $13\ldots3$, в котором k цифр, через a_k. Идея решения такова. Первым ходом Панда обеспечит, чтобы итоговое число не делилось на a_{101} и на a_{100}, вне зависимости от дальнейшей игры. Вторым ходом Панда обеспечит, чтобы итоговое число не делилось на a_{99} и на a_{98}. И так далее, последним своим 50 ходом Панда обеспечит, чтобы итоговое число не делилось на a_3, ни на a_2. Отметим, что на все a_k при $k > 100$ итоговое число в принципе делиться не может.

Покажем, что Панда может так играть. В самом деле, перед k-м ходом Панды (перед этим сколько-то цифр справа уже выбрано) итоговое число принимает 10^{102-2k} значений. Среди них не более одного числа кратно a_{103-2k} и не более 8 чисел кратны a_{102-2k}. Так как десятичных цифр 10, то Панда сможет написать такую цифру, чтобы итоговое число не делилось бы ни на a_{103-2k}, ни на a_{102-2k}.

Это рассуждение надо немного изменить для первого хода — нужно показать, что можно написать ненулевую цифру. В этом случае имеется 0 чисел, кратных a_{101}, и не более 8 чисел, кратных a_{100}. Поэтому можно выбрать первую ненулевую цифру, чтобы итоговое число не делилось бы на a_{100}. На самом деле можно понять, что эта цифра равна 4.

8-6. В графе N вершин. В одной вершине находится невидимый дух, а в некоторых вершинах находятся охотники (в одной вершине может быть несколько охотников). Охотники хотят снять невидимость с духа. На каждом ходу все охотники одновременно стреляют заклятием снятия невидимости: каждый охотник стреляет в любую вершину, с которой он соединён ребром (в том числе он может стрелять в вершину, где находится другой охотник). Охотники совместно определяют, кто куда стреляет. После чего, если хоть один охотник выстрелил в вершину с духом, то дух становится видимым, и охота заканчивается. Иначе дух или остается в текущей вершине, или перемещается в одну из её соседей. Охотники никуда не перемещаются. Далее процесс повторяется.

У охотников есть алгоритм, позволяющий им сделать духа видимым за не более чем X ходов, вне зависимости от начального расположения духа и его перемещений. Докажите, что тогда есть алгоритм сделать духа видимым за не более чем 2^N ходов.

Решение. Рассмотрим алгоритм, который делает духа видимым за минимальное количеств ходов M. То есть, вне зависимости от того, где изначально находился дух и как он перемещался, охотники попадут в него не позднее чем после M ходов.

Введем терминологию: вершина v потенциальна пригодна для духа (ППД) после хода номер L, если существует начальное расположение духа и последовательность перемещений духа, при которой дух ещё невидим (и был невидим на всех предыдущих ходах) и после хода номер L занимает вершину v. После каждого хода будем рассматривать множество из всех ППД вершин. До первого хода все вершины ППД, а цель охотников состоит в том, чтобы после некоторого хода сделать множество ППД вершин пустым (ведь тогда духу негде находится, или же дух был проявлен на более ранних ходах).

Идея решения состоит в том, что в оптимальной стратегии множества ППД вершин после хода 1, после хода 2 и т.д. не могут повторяться! В самом деле, так как никакой информации о передвижении духа охотники не получают, выстрелы охотников не зависят от передвижений духа и его начального положения. Если после k-го выстрела и после m-го выстрела множества ППД вершин совпадают, то стратегия не оптимальна, поскольку все выстрелы от k-го включительно до $m-1$-го включительно можно не делать, и тем самым уменьшить число M.

Поскольку имеется ровно 2^N подмножеств множества из N вершин, охота завершится не более чем через $2^N - 1$ ход (именно через $2^N - 1$ ход, а не через 2^N ходов, так как одно ППД множество, совпадающее с множеством всех вершин, есть до первого хода).