5 класс (продолжительность — 3.5 часа)

5-1. Петя выписал цифры от 1 до 8 в некотором порядке и получил восьмизначное число. Докажите, что Вася может переставить цифры так, чтобы в сумме Петиного и Васиного чисел все цифры были одинаковыми.

Решение. Сопоставим цифры в пары 1–8, 2–7, 3–6, 4–5. Заменим каждую цифру числа на парную ей, заметим, что каждая цифра встретилась по одному разу, следовательно, это перестановка. В сумме эти два числа дадут 99999999.

5-2. В ряд стояли 77 детей. Они как-то переставились, но при этом каждый ребёнок сдвинулся не более чем на одно место (например, ребёнок на месте №7 оказался на одном из мест №6, №7 или №8). Докажите, что хотя бы один их детей остался на месте.

Решение. Рассмотрим сумму номеров мест детей после перестановки, в предположении, что никто из детей не остался на месте. Она равна, с одной стороны, $1+2+\ldots+77$, а с другой стороны, равна $(1\pm1)+(2\pm1)+\ldots+(77\pm1)$. Поэтому сумма 77 слагаемых $\pm1\pm1\ldots\pm1$ должна равняться 0, что невозможно.

Решение. Пусть каждый ребёнок сдвинулся. Так как первый ребёнок сдвинулся, то он сдвинулся на место №2. На место №1 кто-то должен перейти, и этим ребёнком может быть только ребёнок №2. Итак, дети на местах №1 и №2 поменялись местами. Аналогично докажем, что дети на местах №3 и №4 поменялись местами и так далее. Но тогда ребёнок №77 остался на месте.

Критерии. Замечено, но не доказано, что в предположении от противного дети меняются парами: 2 балла.

5-3. В комнате находится 100 лампочек. К каждой лампочке подсоединены два выключателя, каждый либо включён, либо выключен. Лампочка горит только тогда, когда оба выключателя, подсоединённых к ней, включены. Сначала в комнате горело 20 лампочек, а когда все 200 выключателей переключили, стало гореть 33 лампочки. Сколько выключателей теперь надо переключить, чтобы зажглись все лампочки?

Ответ. 87.

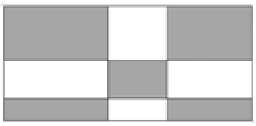
Решение. Лампочки, горевшие вначале, после переключения не горят. Разделим лампочки на три группы: 20 лампочек, которые горели вначале, но не горят сейчас; 33 лампочки, которые горят сейчас; оставшиеся 47, которые не горели ни до, ни после переключения. У 33 лампочек, которые горят сейчас, ни один выключатель переключать не надо. У 20 лампочек, горевших вначале, оба выключателя выключены, поэтому надо переключить 40 выключателей, чтобы зажечь их снова. Наконец, у оставшихся 47 лампочек сначала был выключен один выключатель, а после переключения — другой, а значит, чтобы зажечь их, надо переключить ещё 47 выключателей. Итого надо переключить $40+47=87$ переключателей.

5-4. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды в ряд выстроились в каком-то порядке 1000 лжецов и 1 рыцарь. Ровно у одного их них есть алмаз, и все обитатели острова знают, у кого именно. Каждый сказал: «Алмаз находится у одного из моих соседей!». Как путешественнику, посетившему остров, задать ровно одному из этих обитателей вопрос «Находится ли алмаз у тебя?» и по полученному ответу определить, у кого находится алмаз?

Решение. Из условия следует, что все соседи обладателя алмаза рыцари, но рыцарь только один, следовательно, обладатель алмаза стоит крайним, и это лжец. Спрашиваем, скажем, крайнего левого «Находится ли алмаз у тебя?». Если он отвечает «Да!», то алмаз у другого крайнего, а если отвечает «Нет!», то у него.

Критерии. Есть доказательство того, что крайние лжецы и у одного из них алмаз, но не сказано, кому задавать вопрос и что делать с полученным ответом: 3 балла.

5-5. Прямоугольник периметра 20 разделён на 9 прямоугольников, которые раскрашены в шахматном порядке. Сумма периметров чёрных прямоугольников оказалась равна 33. Найдите сумму периметров белых прямоугольников.



Ответ. 27.

Решение. Нетрудно заметить, что суммарный периметр всех девяти прямоугольников равен утроенному периметру большого прямоугольника, то есть 60. Отсюда сумма периметров белых прямоугольников равна $60 - 33 = 27$.

5-6. У Бори в тетради записано 40 различных чисел. Он заметил, что сумма любых четырёх, умноженная на любое пятое, будет чётной (все пять чисел разные). Докажите, что если Маша возьмёт сумму любых шести и умножит на седьмое (все семь чисел разные), то тоже получится чётное число.

Решение. Пусть Маше удалось найти 7 чисел таких, что сумма шести, умноженная на седьмое, стала нечётная. Тогда 7-е число нечётное и сумма шести — тоже нечётная. Среди 6 чисел найдем два одной чётности, уберём их. Получим 4 числа с нечётной суммой и умножим их на «седьмое» получим противоречие с условием.

Решение. Докажем, что почти все написанные на доске числа одной чётности (40 чётных, 40 нечётных, или 39 чётных и 1 нечётное). Если все числа — чётные, то задача решена. Пусть есть нечётное число, возьмём его в качестве «пятого» числа Бори. Тогда сумма любых четырёх из остальных должна быть чётна. Легко видеть, что это возможно только если все числа одной чётности. Следовательно, нечётных чисел либо ровно одно, либо 40.

Если Маша возьмёт «седьмым» чётное число, то она точно получит чётное произведение. А если нечётное, то все остальные числа будут одной чётности, поэтому сумма любых шести из них чётна.

6 класс (продолжительность — 3.5 часа)

6-1. Петя выписал цифры от 1 до 8 в некотором порядке и получил восьмизначное число. Докажите, что Вася может переставить цифры так, чтобы в сумме Петиного и Васиного чисел все цифры были одинаковыми.

Решение. Сопоставим цифры в пары 1–8, 2–7, 3–6, 4–5. Заменим каждую цифру числа на парную ей, заметим, что каждая цифра встретилась по одному разу, следовательно, это перестановка. В сумме эти два числа дадут 99999999.

6-2. Заяц и черепаха побежали вокруг прямоугольного парка в разные стороны, стартовав от угла. Заяц бегает в 47 раз быстрее черепахи. Черепаха встретила зайца на следующем углу, а до этого успела встретить его ещё 3 раза. Во сколько раз сторона, вдоль которой ползла черепаха, короче другой стороны прямоугольника?

Ответ. В 5 раз.

Решение. Пусть наш прямоугольник имеет стороны a и b, причём черепаха побежала по стороне a. Заметим, что до момента указанной встречи в вершине черепаха пробежала a, а заяц пробежал три раза прямоугольник целиком и еще стороны b, a и b. Так как черепаха в 47 раз медленнее, получаем уравнение:

$$47a = 3(2a + 2b) + b + a + b \Longleftrightarrow 47a = 7a + 8b \Longleftrightarrow 5a = b.$$

То есть одна сторона в пять раз короче другой.

6-3. За круглым столом сидят 200 человек. Некоторые из них всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. У ведущего имеется 200 карточек, на каждой из которых написано число 1, 2 или 3. Он раздал каждому сидящему за столом по карточке и спросил, какое число там написано. Все ответили: «На моей карточке написано число 1!» Ведущий как-то иначе раздал эти же самые карточки и повторил свой вопрос. Все ответили: «На моей карточке написано число 2!» Ведущий третий раз раздал эти же карточки и задал тот же вопрос. Может ли оказаться так, что все ответят: «На моей карточке написано число 3!»?

Решение. В первый раз все ответили: «На моей карточке написано число 1!», это значит, что тем, кто всегда говорит правду попались карточки с «1», а тем, кто в всегда лжет — с «2» и «3». Тогда, карточек с «1» ровно столько, сколько и людей, которые всегда говорят правду. Аналогично из второго ответа следует, что карточек с «2» ровно столько, сколько людей, которые всегда говорят правду. Если бы в третий раз все сказали: «На моей карточке написано число 3!», то из этого следовало, что карточек с «3» тоже ровно столько, сколько людей, которые всегда говорят правду. И тогда получалось бы, что всего карточек в три раза больше, чем людей, которые всегда говорят правду. Но карточек всего 200, а 200 не делится на 3.

Критерии. Замечено, но не доказано, что карточек с разными номиналами должно быть поровну: 3 балла.

6-4. На столе выложены карточки с номерами 1, 2, ...999. Вася и Петя по очереди берут эти карточки со стола, играя. Начинает Петя, своим ходом он берет со стола две карточки, номера которых отличаются на 3. Вася же своим ходом берет со стола две карточки, номера которых отличаются на 1. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков всегда может выиграть в этой игре вне зависимости от действий соперника?

Решение. Приведем выигрышную стратегию Васи. Если Петя берёт карточки a и $a + 3$, в ответ Вася возьмёт карточки $a + 1$ и $a + 2$. Легко видеть, что Вася всегда может сделать ход, пока на столе есть карточки, то есть он точно не проиграет. Так как игра когда-то закончится, то Вася выиграет.

Критерии. Верная стратегия без обоснования: 5 баллов.

6-5. У Бори в тетради записано 40 различных чисел. Он заметил, что сумма любых четырёх, умноженная на любое пятое, будет чётной (все пять чисел разные). Докажите, что если Маша возьмёт сумму любых шести и умножит на седьмое (все семь чисел разные), то тоже получится чётное число.

Решение. Пусть Маше удалось найти 7 чисел таких, что сумма шести, умноженная на седьмое, стала нечётная. Тогда 7-е число нечётное и сумма шести — тоже нечётная. Среди 6 чисел найдем два одной чётности, уберём их. Получим 4 числа с нечётной суммой и умножим их на «седьмое» получим противоречие с условием.

Решение. Докажем, что почти все написанные на доске числа одной чётности (40 чётных, 40 нечётных, или 39 чётных и 1 нечётное). Если все числа — чётные, то задача решена. Пусть есть нечётное число, возьмём его в качестве «пятого» числа Бори. Тогда сумма любых четырёх из остальных должна быть чётна. Легко видеть, что это возможно только если все числа одной чётности. Следовательно, нечётных чисел либо ровно одно, либо 40.

Если Маша возьмёт «седьмым» чётное число, то она точно получит чётное произведение. А если нечётное, то все остальные числа будут одной чётности, поэтому сумма любых шести из них чётна.

6-6. На доске написано 100 натуральных чисел. Оказалось, что разность наибольшего и наименьшего из них ровно в 10 раз больше, чем наибольший общий делитель всех этих ста чисел. Докажите, что среди написанных чисел найдутся 10 одинаковых.

Решение. Пусть НОД всех этих чисел равен d. Тогда пусть наименьшее число равно kd. Тогда остальные числа числа могут принимать значения $kd, (k+1)d, \ldots, (k+10)d$. Но в силу принципа Дирихле, какое-то из этих значений будет приниматься хотя бы 10 раз.

Критерии. Замечено, что в предположении противного, групп различных чисел $\geqslant 12$: 2 балла.

7 класс (продолжительность — 3 часа 55 минут)

7-1. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды в ряд выстроились в каком-то порядке 1000 лжецов и 1 рыцарь. Ровно у одного их них есть алмаз, и все обитатели острова знают, у кого именно. Каждый сказал: «Алмаз находится у одного из моих соседей!». Как путешественнику, посетившему остров, задать ровно одному из этих обитателей вопрос «Находится ли алмаз у тебя?» и по полученному ответу определить, у кого находится алмаз?

Решение. Из условия следует, что все соседи обладателя алмаза рыцари, но рыцарь только один, следовательно, обладатель алмаза стоит крайним, и это лжец. Спрашиваем, скажем, крайнего левого «Находится ли алмаз у тебя?». Если он отвечает «Да!», то алмаз у другого крайнего, а если отвечает «Нет!», то у него.

Критерии. Есть доказательство того, что крайние лжецы и у одного из них алмаз, но не сказано, кому задачать вопрос и что делать с полученным ответом: 3 балла.

7-2. На луче, являющемся биссектрисой угла острого угла B треугольника ABC, отмечены точки X и Y так, что $AB = BX = AY$ и $XY = BC$; точка X лежит между B и Y. Докажите, что $AX = CX$.

Решение. Так как $AB = AY$, то треугольник ABY равнобедренный, значит, $\angle AYB = \angle ABY$, а так как BY — биссектриса угла ABC, то $\angle AYB = \angle ABY = \angle YBC$. Рассмотрим треугольники AYX и XBC. Стороны AY и BX, а также XY и BC равны по условию, и мы доказали, что углы AYX и XBC равны. Значит, эти треугольники равны, откуда $AX = CX$.

7-3. На столе выложены карточки с номерами $1, 2, \ldots 999$. Вася и Петя по очереди берут эти карточки со стола, играя. Начинает Петя, своим ходом он берет со стола две карточки, номера которых отличаются на 3. Вася же своим ходом берет со стола две карточки, номера которых отличаются на 1. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков всегда может выиграть в этой игре вне зависимости от действий соперника?

Решение. Приведем выигрышную стратегию Васи. Если Петя берёт карточки a и $a + 3$, в ответ Вася возьмёт карточки $a+1$ и $a+2$. Легко видеть, что Вася всегда может сделать ход, пока на столе есть карточки, то есть он точно не проиграет. Так как игра когда-то закончится, то Вася выиграет.

Критерии. Верная стратегия без обоснования: 5 баллов.

7-4. Действительные числа a, b, c, d таковы, что $a + b = cd$ и $c + d = ab$. Докажите неравенство

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1) \geqslant 0.$$

Решение. $(a+1)(b+1) = ab+a+b+1 = a+b+c+d+1$. Аналогично, $(c+1)(d+1) = a+b+c+d+1$. Поэтому $(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1) = (a + b + c + d + 1)2 \geqslant 0$.

7-5. В каждую клеточку таблицы 10×10 Вася как угодно помещает одно из чисел от 1 до 100, каждое число встречается ровно 1 раз. Петя имеет право сделать 11 ходов, сами числа он при этом не видит. Ход состоит в том, что Петя указывает на строку (или столбец), а Вася должен записать числа в этой строке(столбце) в порядке возрастания слева-направо (сверху-вниз), т.е отсортировать стоку (столбец). После 11 ходов Петя должен указать на какую-то клеточку, и в ней должно оказаться число в диапазоне от 30 до 71 включительно. Как Пете добиться своей цели?

Решение. Сначала Петя в любом порядке сортирует 10 строк, затем он сортирует 6й столбец слева. Тогда число в пятой сверху клетке шестого слева столбца будет лежать в диапазоне от 30 до 71. Докажем это.

1) Пусть это число $\leqslant 29$. Тогда в шестом столбце есть ещё хотя бы 4 числа $\leqslant 29$. До сортировки столбца рассматриваемые 5 чисел, не превосходящих 29, стояли в каких-то строках. В этих строках левее рассматриваемых (после сортировки строк) чисел были числа, меньшие 29. Итого чисел, не превосходящих 29, в таблице было не менее чем 30 штук, что неверно.

2) Пусть это число $\geqslant 71$. Тогда в шестом столбце есть ещё хотя бы 5 числа $\geqslant 71$. До сортировки столбца рассматриваемые 6 чисел, не меньших 71, стояли в каких-то строках. В этих строках правее рассматриваемых чисел (после сортировки строк) были числа, большие 71. Итого чисел, не меньших 71, в таблице было не менее чем 30 штук, что неверно.

Критерии. Верная стратегия без обоснования: 3 балла.

7-6. Парк имеет форму круга. На границе парка находятся 100 входов в парк. Любые два входа соединены в парке прямой дорожкой, при этом никакие три дорожки не пересекаются в одной точке. В каждой точке пересечения двух дорожек, а так же во всех входах в парк, находятся парковки электросамокатов. По некоторым дорожкам можно ходить только пешком (это правило относится ко всей дорожке целиком, а не к её отдельным кускам). Оказалось, что от любой парковки электросамокатов можно проехать до любой другой парковки на электросамокате. Докажите, что это можно сделать, повернув не более двух раз.

Решение. Будем называть дорожки, которых не коснулось введенное правило, открытыми. Из условия следует, что из двух дорожек, пересекающихся внутри парка, хотя бы одна открыта. Рассмотрим две парковки. Пусть одна парковка расположена на открытой дорожке AB (A и B — входы в парк), а другая — на открытой дорожке CD. Если дорожки AB и CD пересекаются или совпадают, достаточно не более чем одного поворота.

Если же они не пересекаются, будем без ограничения общности считать, что выходы A, B, C, D расположены вдоль границы парка именно в таком порядке. Тогда пересекаются дорожки AC и BD, поэтому хотя бы одна из них открыта. Значит, можно проехать по ней, дорожкам AB и CD, повернув ровно дважды.

Критерии. Замечено, что на любой парковке есть хотя бы одна дорожка, по которой можно выехать на самокате: 1 балл.

8 класс (продолжительность — 3 часа 55 минут)

8-1. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды в ряд выстроились в каком-то порядке 1000 лжецов и 1 рыцарь. Ровно у одного их них есть алмаз, и все обитатели острова знают, у кого именно. Каждый сказал: «Алмаз находится у одного из моих соседей!». Как путешественнику, посетившему остров, задать ровно одному из этих обитателей вопрос «Находится ли алмаз у тебя?» и по полученному ответу определить, у кого находится алмаз?

Решение. Из условия следует, что все соседи обладателя алмаза рыцари, но рыцарь только один, следовательно, обладатель алмаза стоит крайним, и это лжец. Спрашиваем, скажем, крайнего левого «Находится ли алмаз у тебя?». Если он отвечает «Да!», то алмаз у другого крайнего, а если отвечает «Нет!», то у него.

8-2. На столе выложены карточки с номерами 1, 2, ... 999. Вася и Петя по очереди берут эти карточки со стола, играя. Начинает Петя, своим ходом он берет со стола две карточки, номера которых отличаются на 3. Вася же своим ходом берет со стола две карточки, номера которых отличаются на 1. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков всегда может выиграть в этой игре вне зависимости от действий соперника?

Решение. Приведем выигрышную стратегию Васи. Если Петя берёт карточки a и $a+3$, в ответ Вася возьмёт карточки $a+1$ и $a+2$. Легко видеть, что Вася всегда может сделать ход, пока на столе есть карточки, то есть он точно не проиграет. Так как игра когда-то закончится, то Вася выиграет.

Верная стратегия без обоснования: 4 балла.

8-3. Существуют ли действительные числа a и b, для которых $a = b^{2026} + 1$, $b = a^{2026} + 1$?

Решение. Заметим, что $a \geqslant 1$ и $b \geqslant 1$. Но тогда $a = b^{2026} + 1 > b + 1 > b$ и аналогично $b > a$. Противоречие, значит, таких чисел нет.

Критерии. Доказано, что $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$: 2 балла.

8-4. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ выбрана точка K. Перпендикуляр из A на прямую BK пересекается с перпендикуляром из D на прямую CK в точке L. Точка M — середина отрезка KL, точка O — центр параллелограмма, т.е. точка пересечения AC и BD. Докажите, что прямые OM и AD перпендикулярны.

Решение. Пусть KO пересекает BC в точке X. Легко показать, что $DX||BK$ и $AX||CK$. Тем самым перпендикуляр из A на прямую BK есть высота треугольника AXD, и перпендикуляр из D на прямую CK тоже является высотой треугольника AXD. Поэтому LX — третья высота треугольника AXD, то есть $LX \perp AD$. Осталось заметить, что $MO||LX$ как средняя линия треугольника LKX (ясно, что O – середина KX).

8-5. Парк имеет форму круга. На границе парка находятся 100 входов в парк. Любые два входа соединены в парке прямой дорожкой, при этом никакие три дорожки не пересекаются в одной точке. В каждой точке пересечения двух дорожек, а так же во всех входах в парк, находятся парковки электросамокатов. По некоторым дорожкам можно ходить только пешком (это правило относится ко всей дорожке целиком, а не к её отдельным кускам). Оказалось, что от любой парковки электросамокатов можно проехать до любой другой парковки на электросамокате. Докажите, что это можно сделать, повернув не более двух раз.

Решение. Будем называть дорожки, которых не коснулось введенное правило, открытыми. Из условия следует, что из двух дорожек, пересекающихся внутри парка, хотя бы одна открыта. Рассмотрим две парковки. Пусть одна парковка расположена на открытой дорожке AB (A и B — входы в парк), а другая — на открытой дорожке CD. Если дорожки AB и CD пересекаются или совпадают, достаточно не более чем одного поворота.

Если же они не пересекаются, будем без ограничения общности считать, что выходы A, B, C, D расположены вдоль границы парка именно в таком порядке. Тогда пересекаются дорожки AC и BD, поэтому хотя бы одна из них открыта. Значит, можно проехать по ней, дорожкам AB и CD, повернув ровно дважды.

Критерии. Замечено, что на любой парковке есть хотя бы одна дорожка, по которой можно выехать на самокате: 1 балл.

8-6. Натуральные числа a и b зафиксированы. Рассмотрим все такие натуральные числа n, что число

$$\left(a+\frac{1}{2}\right)^n+\left(b+\frac{1}{2}\right)^n$$

является целым. Докажите, что таких чисел n — конечное количество.

Решение. Пусть $u = 2a + 1$, $v = 2b + 1$. Тогда нам нужно доказать, что $u^n + v^n$ не может делиться на 2^n для бесконечно многих n. Так как u и v нечётны, при чётном n число $u^n + v^n$ не кратно даже 4 и тем более 2^n. Поэтому достаточно разобрать случай, когда n нечётно. В этом случае $u^n+v^n = (u+v)(u^{n-1}+u^{n-2}v+\ldots+v^{n-1})$. Второй сомножитель в правой части является суммой n нечётных слагаемых и потому нечётен. Следовательно, если $u^n + v^n$ кратно 2^n, то на 2^n должно делиться $u + v$. Это, очевидно, имеет место лишь для конечного количества n.

Критерии. Задача переформулирована в терминах делимости на 2^n: 1 балл.